BASES DE GRÖBNER, ET INTÉGRALES GIGOGNES

Joël MERKER

DMA, École Normale Supérieure, Paris

- $X = X^\nu$ hypersurface algébrique lisse de $\mathbb{P}^{\nu+1}_{\mathbb{C}}$.
- $\nu =$ dimension $= 2$ ou $= 3$ ici.
- $d =$ degré de X.
- $\Omega^p_X =:$ faisceau des p-formes holomorphes sur X.
- $K_X := \Omega^\nu_X =:$ fibré canonique.
- **Définition :** X^ν est **de type général** si

$$h^0\big(X,\, K_X^{\otimes m}\big)$$

est de l'ordre de grandeur de m^ν quand $m \to \infty$.

- **Fait :** Génériquement, toute X^ν de degré $\boxed{d \geqslant \nu + 3}$ est de type général, où $\nu + 3$ est optimal.

Conjecture de Green-Griffiths : toute $X^\nu \subset \mathbb{P}^{\nu+1}_{\mathbb{C}}$ de type général contient une sous-variété algébrique propre $Y \subsetneq X$ qui absorbe toutes les courbes entières non constantes à valeurs dans X.

Stratégie de Demailly, Demailly-El Goul, Rousseau.

Sous-objectif : construire des **équations différentielles globales** qui seront satisfaites par toute courbe entière en degré optimal :

$d_{opt} = \mathbf{5}$ en dimension $\nu = 2$; $d_{Dem-ElG} = \mathbf{15}$; **21** ;

$d_{opt} = \mathbf{6}$ en dimension $\nu = 3$; $d_{Rousseau} = \mathbf{97}$; **593**.

II. Généralités sur le fibré de Demailly–Semple

• **Semple ∼ 1950 ; Demailly 1997 :** faisceau des opérateurs différentiels invariants :

$$\mathcal{DS}_{\nu}^{\kappa} T_X^*$$

$(\nu = \dim X)$ jusqu'aux dérivées (jets) d'ordre $\kappa \geqslant 1$.

• $\kappa :=$ **ordre des jets**.

• **Définition :** Dans une carte locale, si on note :

$$j^\kappa f := \big(f_1', \dots, f_\nu', f_1'', \dots, f_\nu'', \dots\dots, f_1^{(\kappa)}, \dots, f_\nu^{(\kappa)}\big)$$

le jet d'ordre κ d'un disque holomorphe

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_\nu) : \mathbb{C} \supset U \to V \subset X,$$

on recherche les polynômes $\mathsf{P} = \mathsf{P}(j^\kappa f)$ tels que :

$$\boxed{\mathsf{P}\big(j^\kappa(f \circ \phi)\big) = (\phi')^m \, P\big((j^\kappa f) \circ \phi\big)},$$

pour toute reparamétrisation à la source $U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \subset \mathbb{C}$,

où $m \geqslant 1$ est un entier qui sera appelé le **poids** de P.

• **Graduation :** $\mathcal{DS}_{\nu}^{\kappa} T_X^* = \oplus_m \big(\mathcal{DS}_{\nu,m}^{\kappa} T_X^*\big)$ de ce faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres.

• **Question ouverte :** comprendre la structure algébrique de ce fibré pour les jets d'ordre élevé.

$\mathcal{DS}_{\nu,m}^{\kappa} T_X^*$.

• **Classes de Chern de** X : c_1, c_2, c_3, ..., c_ν.

• **Estimation attendue :** en dimension $\nu = 2$:

$$\chi\big(X,\, \mathcal{DS}_{2,m}^{\kappa} T_X^*\big) = m^{\kappa+2}\Big(\mathsf{A}^\kappa \cdot \mathsf{c}_1^2 - \mathsf{B}^\kappa \cdot \mathsf{c}_2\Big) + \mathrm{O}\big(m^{\kappa+1}\big),$$

avec deux coefficients rationnels > 0 dont le quotient :

$$\frac{\mathsf{A}^\kappa}{\mathsf{B}^\kappa} \longrightarrow \infty$$

doit tendre vers l'infini avec κ.

• **En fonction du degré** d **de** X **:** ($\nu = 2$) :

$$\mathsf{c}_1^2 = d\,(\mathbf{4} - d)^2.$$

• **En dimensions trois et quatre :**

$$\frac{\chi_{3,m}^{\kappa}}{m^{2\kappa+3}} = -\mathsf{A}^\kappa \cdot d\,(\mathbf{5} - d)^3 + \mathsf{B}^\kappa \cdot \mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 - \mathsf{C}^\kappa \cdot \mathsf{c}_3 + \mathrm{O}\big(\frac{1}{m}\big),$$

$$\frac{\chi_{4,m}^{\kappa}}{m^{3\kappa+4}} = \mathsf{A}^\kappa \cdot d\,(\mathbf{6} - d)^4 - \mathsf{B}^\kappa \cdot \mathsf{c}_1^2\mathsf{c}_2 + \mathsf{C}^\kappa \cdot \mathsf{c}_2^2 -$$

$$- \mathsf{D}^\kappa \cdot \mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 + \mathsf{E}^\kappa \cdot \mathsf{c}_4 + \mathrm{O}\big(\frac{1}{m}\big).$$

• Eu égard à la conjecture de Green-Griffiths, **on attend que le coefficient** A^κ **domine tous les autres lorsque** $\kappa \to \infty$, d'où par exemple en dimension deux :

$$\boxed{\frac{\chi_{2,m}^{\kappa}}{m^{\kappa+2}} \sim d\,(\mathbf{4} - d)^2\, \frac{\mathsf{A}^\kappa}{\mathsf{B}^\kappa} \longrightarrow \infty \qquad \text{pour tout } d \geqslant 5}.$$

• $\underline{\nu = 2:}$ $\qquad \mathsf{c}_1^2 = d\,(\mathbf{4} - d)^2 \qquad\qquad d_{opt} = \mathbf{5}$

• $\underline{\nu = 3:}$ $\qquad \mathsf{c}_1^3 = d\,(\mathbf{5} - d)^3 \qquad\qquad d_{opt} = \mathbf{6}$

• $\underline{\nu = 4:}$ $\qquad \mathsf{c}_1^4 = d\,(\mathbf{6} - d)^4 \qquad\qquad d_{opt} = \mathbf{7}$

• **Résultats connus en dimension 2 :**

□ **Demailly 1997 :** $\nu = 2$, $\kappa = 2$:

$$\chi^2_{2,m} = \frac{m^4}{648}\big(13\,\mathsf{c}_1^2 - 9\,\mathsf{c}_2\big) + \mathrm{O}\big(m^3\big),$$

$$\frac{13}{9} = \mathbf{1,444}\cdots,$$

positif pour tout $d \geqslant 15$.

□ **Demailly ; Rousseau ~ 2004 :** $\nu = 2$, $\kappa = 3$:

$$\chi^3_{2,m} = \frac{m^5}{6250}\big(47\,\mathsf{c}_1^2 - 26\,\mathsf{c}_2\big) + \mathrm{O}(m^4),$$

$$\frac{47}{26} = \mathbf{1,807}\cdots,$$

positif pour tout $d \geqslant 11$.

• **Résultats connus en dimension 3 :**

□ **Rousseau ~ 2004 :**

$$\chi^3_{3,m} \sim \frac{-m^9}{40824\cdot 10^7}\Big(29233\,\mathsf{c}_1^3 - 39672\,\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 + 12384\,\mathsf{c}_3\Big)$$

$$= \frac{m^9}{81648\cdot 10^6}\,d\,\big(389\,d^3 - 20739\,d^2 + 185559\,d - 358873\big),$$

positif pour tout $d \geqslant 43$.

• **Formule générale pour la caractéristique :**

$$\chi_{2,m}^{\kappa} = \frac{m^{\kappa+2}}{\mathsf{B}^{\kappa}} \left(\frac{\mathsf{A}^{\kappa}}{\mathsf{B}^{\kappa}} \cdot \mathsf{c}_1^2 - \mathsf{c}_2 \right) + \mathrm{O}\big(m^{\kappa+1}\big).$$

• **Quotient significatif :**

$$\mathcal{C}^{\kappa} := \frac{\mathsf{A}^{\kappa}}{\mathsf{B}^{\kappa}}.$$

• **Exprimer** en fonction du degré d de $X^2 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$:

$$\mathsf{c}_1^2 = d\,(4-d)^2, \qquad\qquad \mathsf{c}_2 = d\,(d^2 - 4\,d + 6).$$

• **Résultat :**

$$\chi_{2,m}^{\kappa} = \frac{m^{\kappa+2}}{\mathsf{B}^{\kappa}}\, d\, \mathsf{q}_{\mathcal{C}^{\kappa}}(d) + \mathrm{O}\big(m^{\kappa+1}\big).$$

avec :

$$\boxed{\mathsf{q}_{\mathcal{C}^{\kappa}}(d) := d^2(\mathcal{C}^{\kappa} - 1) - d(8\,\mathcal{C}^{\kappa} - 4) + 16\,\mathcal{C}^{\kappa} - 6}\,.$$

• **Question :** si $\mathcal{C}^{\kappa}$ tend effectivement vers l'infini, à partir de quelle valeur de $\mathcal{C}^{\kappa}$ a-t-on (comme on l'attend) :

$$\mathsf{q}_{\mathcal{C}^{\kappa}}(d) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad d \geqslant 5?$$

• **Réponse :** il faut **élever l'ordre** κ **des jets** jusqu'à ce que ce quotient significatif $\mathcal{C}^{\kappa} = \frac{\mathsf{A}^{\kappa}}{\mathsf{B}^{\kappa}}$ dépasse strictement le nombre **onze**.

• **Observation embarassante :**

$$\mathcal{C}^{\kappa=2} = \mathbf{1,44} \qquad \mathcal{C}^{\kappa=3} = \mathbf{1,80} \qquad \mathcal{C}^{\kappa=4} = \mathbf{2,12}.$$

IV. Jets d'ordre 4 en dimension 2

- **Supposer** $\nu = 2$ **et** $\kappa = 4$**.**
- **Objectif :** décrire $\mathcal{D}\mathcal{S}^4_{2,m} T^*_X$.
- Résultat connu, mais non publié (Demailly, Rousseau).
- **Recherches sur ordinateur :**
- **9** invariants fondamentaux pour $\kappa = 4$.
- **9** syzygies pour $\kappa = 4$ (Maple).
- **15** invariants pour $\kappa = 5$, **mais** il en manque **10**.
- **Dans cet exposé :**
  - □ **Calculs manuels**
  - □ **Un procédé pour engendrer les invariants**
  - □ **Trois procédés pour engendrer les syzygies**

Théorème. Le calcul de caractéristique d'Euler donne :

$$\chi\big(X, \mathcal{D}\mathcal{S}^4_{2,m} T^*_X\big) = \frac{m^6}{12293120}\big(1797\, \mathsf{c}_1^2 - 848\, \mathsf{c}_2\big) + \mathrm{O}(m^5)$$

et le quotient significatif $\mathcal{C}^4 = \frac{1797}{848} = \mathbf{2,119}\cdots$ assure la positivité pour tout degré $d \geqslant \mathbf{9}$.

- **Décomposer** $\mathcal{D}\mathcal{S}^4_{2,m} T^*_X$ en représentations irréductibles de Schur $\Gamma^{\lambda_1, \lambda_2} T^*_X$.

• L'algèbre complète $\mathcal{DS}^4_{2,m}T^*_X$ sera une certaine somme (très difficile à obtenir lorsque $\kappa \geqslant 5$) de ces $\Gamma^{\lambda_1,\lambda_2}T^*_X$ et on pourra calculer les caractéristiques d'Euler grâce à la formule :

$$\chi\big(X,\,\Gamma^{\lambda_1,\lambda_2}T^*_X\big) = \mathsf{c}_1^2\big[\lambda_1^3 - \lambda_2^3\big] - \mathsf{c}_2\big(\lambda_1-\lambda_2\big)^3 + \\ + \mathrm{O}\big(|\lambda|^2\big),$$

où le $\mathrm{O}\big(|\lambda^2|\big)$ donnera du $\mathrm{O}\big(m^5\big)$ après sommation, ce qui constituera un reste négligeable par rapport à m^6.

• **Raccourci :** pour repérer les fibrés de Schur $\Gamma^{\lambda_1,\lambda_2}T^*_X$ qui composent $\mathcal{DS}^4_{2,m}T^*_X$, **chercher directement** les polynômes invariants par reparamétrisation $\mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(j^4f\big)$ qui sont **aussi** invariants par l'action unipotente définie par :

$$\mathsf{u}\cdot f_1^{(\lambda)} = f_1^{(\lambda)} \qquad\qquad \mathsf{u}\cdot f_2^{(\lambda)} = f_2^{(\lambda)} + u\, f_1^{(\lambda)},$$

où $u \in \mathbb{C}$, pour tout λ tel que $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, et pour préciser, qui satisfont :

$$\mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(\mathsf{u}\cdot j^4f\big) \equiv \mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(j^4f\big),$$

pour tout $u \in \mathbb{C}$.

• **Intérêts du raccourci :**

□ lorsqu'on engendre tous les invariants, seules des divisions éventuelles par f_1' interfèrent ;

□ il suffit seulement de « gröbnériser » l'idéal des polynômes fondamentaux doublement invariants ainsi engendrés.

$$\Delta^{\alpha,\beta} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} \end{vmatrix}.$$

• Exemples :

$$\Delta^{1,2} = \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta^{2,3} = \begin{vmatrix} f_1'' & f_2'' \\ f_1''' & f_2''' \end{vmatrix}.$$

• Observation :

$$\mathsf{u} \cdot \Delta^{\alpha,\beta} = \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} + u\, f_1^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} + u\, f_1^{(\beta)} \end{vmatrix} = \Delta^{\alpha,\beta}.$$

Théorème. *Tout polynôme* $\mathsf{P}^{2\times\mathrm{inv}}\big(j^4 f\big)$ *de poids* m *invariant par reparamétrisation et par rapport à l'action unipotente s'écrit sous forme unique :*

$$\mathsf{P}^{2\times\mathrm{inv}}\big(j^4 f\big) = \mathsf{Q}\big(f_1', \Lambda^3, \Lambda^7_{1,1}, M^8\big) + \\ + \Lambda^5_1\, \mathsf{R}\big(f_1', \Lambda^3, \Lambda^7_{1,1}, M^8\big),$$

où Q *et* R *sont des polynômes arbitraires de poids* m *et* $m-5$ *et où les cinq polynômes fondamentaux :*

$$\big(f_1' \quad \Lambda^3 \quad \Lambda^5_1 \quad \Lambda^7_{1,1} \quad M^8\big),$$

$$\boxed{\begin{aligned} & f_1' \\ \Lambda^3 &:= \Delta^{1,2} \\ \Lambda_1^5 &:= \Delta^{1,3}\, f_1' - 3\,\Delta^{1,2}\, f_1'' \\ \Lambda_{1,1}^7 &:= \Delta^{1,4}\, f_1' f_1' + 4\,\Delta^{2,3}\, f_1' f_1' - 10\,\Delta^{1,3}\, f_1' f_1'' + \\ & \qquad\qquad + 15\,\Delta^{1,2}\, f_1'' f_1'' \\ M^8 &:= 3\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 12\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2} - 5\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} \end{aligned}},$$

et sont manifestement doublement invariants. De plus, l'idéal des relations entre ces cinq polynômes est principal, *à savoir* : *il est engendré par l'unique relation* :

$$0 \equiv f_1' f_1' M^8 - 3\,\Lambda^3 \Lambda_{1,1}^7 + 5\,\underline{\Lambda_1^5 \Lambda_1^5}.$$

• **Observation :** Tout polynôme $\mathsf{P}\big(f_1', \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big)$ en ces cinq invariants doit s'écrire de manière unique en tenant compte de cette syzygie :

□ remplacer toutes les occurences de $\underline{\Lambda_1^5 \Lambda_1^5}$ par $-\frac{1}{5}\, f_1' f_1'\, M^8 - \frac{3}{5}\, \Lambda^3\, \Lambda_{1,1}^7$;

□ obtenir la forme annoncée :

$$\begin{aligned} \mathsf{P}^{2\times \mathrm{inv}}\big(j^4 f\big) = \mathsf{Q}\big(f_1', \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big) + & \\ + \Lambda_1^5\, \mathsf{R}\big(f_1', \Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big). & \end{aligned}$$

toriel des polynômes de poids m invariant par reparamétrisation et par rapport à l'action unipotente est constituée de l'ensemble des monômes :

$$(f_1')^\alpha\,(\Lambda^3)^\beta\,(\Lambda^7_{1,1})^\gamma\,(M^8)^\delta,$$

$$\text{avec}\ \ \alpha+3\beta+7\gamma+8\delta=m, \qquad \text{et :}$$

$$\Lambda_1^5\,(f_1')^\alpha\,(\Lambda^3)^\beta\,(\Lambda^7_{1,1})^\gamma\,(M^8)^\delta,$$

$$\text{avec}\ \ \alpha+3\beta+7\gamma+8\delta=m-5,$$

qui correspondent aux représentations irréductibles de Schur :

$$\Gamma^{\alpha+\beta+3\gamma+2\delta,\ \beta+\gamma+2\delta}T_X^*, \qquad \text{et :}$$

$$\Gamma^{2+\alpha+\beta+3\gamma+2\delta,\ 1+\beta+\gamma+2\delta}T_X^*,$$

ce qui permet d'achever le calcul de Riemann-Roch. □

Corollaire. *Tout polynôme* $\mathsf{P}\big(j^4 f\big)$ *invariant par reparamétrisation s'exprime polynomialement en fonction des neuf invariants fondamentaux* $f_1', f_2', \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_2^5, \Lambda^7_{1,1}, \Lambda^7_{1,2} = \Lambda^7_{2,1}$, $\Lambda^7_{2,2}$ *et* M^8 *donnés comme suit par des formules explicites* :

$$\boxed{\begin{aligned} & f_i' \\ \Lambda^3 &:= \Delta^{1,2} \\ \Lambda_i^5 &:= \Delta^{1,3}\, f_i' - 3\,\Delta^{1,2}\, f_i'' \\ \Lambda^7_{i,j} &:= \Delta^{1,4}\, f_i' f_j' + 4\,\Delta^{2,3}\, f_i' f_j' - 5\,\Delta^{1,3}\big(f_i'' f_j' + f_i' f_j''\big) + \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + 15\,\Delta^{1,2}\, f_i'' f_j'' \\ M^8 &:= 3\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 12\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2} - 5\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} \end{aligned}}\ .$$

$$\mathsf{P}\big(j^4(f\circ\phi)\big) = \phi'^m\,\mathsf{P}\big((j^4 f)\circ\phi\big),$$

à $\phi := f_1^{-1}$, avec les belles formules suivantes :

$$\big(f_2\circ f_1^{-1}\big)' = \frac{f_2'}{f_1'}\circ f_1^{-1},$$

$$\big(f_2\circ f_1^{-1}\big)'' = \frac{\Lambda^3}{(f_1')^3}\circ f_1^{-1},$$

$$\big(f_2\circ f_1^{-1}\big)''' = \frac{\Lambda_1^5}{(f_1')^5}\circ f_1^{-1},$$

$$\big(f_2\circ f_1^{-1}\big)'''' = \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f_1')^7}\circ f_1^{-1},$$

engageantes — qui font croire à tort que la branche d'invariants $\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \dots$ est la bonne — d'où :

$$\mathsf{P}\left(1, \frac{f_2'}{f_1'}, 0, \frac{\Lambda^3}{(f_1')^3}, 0, \frac{\Lambda_1^5}{(f_1')^5}, 0, \frac{\Lambda_{1,1}^7}{(f_1')^7}\right)\circ f_1^{-1} = \\ = \left(\frac{1}{f_1'}\circ f_1^{-1}\right)^m \mathsf{P}\big((j^4 f\circ f_1^{-1})\big).$$

puis en reparamétrisant par f_1 et en simplifiant :

$$\mathsf{P}\big(j^4 f\big) = \sum_{-\frac{3}{4}m\leqslant a\leqslant m} (f_1')^a\,\mathsf{P}_a\big(f_2', \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7\big).$$

$\boxed{\triangle}$ **Problème :** il y a des **puissances négatives** de f_1'.

$\boxed{?}$ **Pourquoi ? Comment les éliminer ?**

$$\mathsf{u}\cdot f_2' = f_2' + u\, f_1',$$

$$\mathsf{u}\cdot \Lambda^3 = \Lambda^3, \qquad \mathsf{u}\cdot \Lambda_1^5 = \Lambda_1^5, \qquad \mathsf{u}\cdot \Lambda_{1,1}^7 = \Lambda_{1,1}^7,$$

donc chaque P_a est indépendant de f_2' :

$$\boxed{\mathsf{P}\big(j^4 f\big) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f_1')^a\, \mathsf{P}_a\big(\Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7\big)}\,.$$

• **Tirer M^8 de son chapeau :** remplacer toutes les carrés $\Lambda_1^5\Lambda_1^5$ par $-\frac{1}{5}\, f_1' f_1'\, M^8 + \frac{3}{5}\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,1}^7$, et obtenir :

$$\mathsf{P}\big(j^4 f\big) = \sum_{-\frac{3}{4}m \leqslant a \leqslant m} (f_1')^a \Big[\mathsf{Q}_a\big(\Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big) + \\ + \Lambda_1^5\, \mathsf{R}_a\big(\Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big)\Big].$$

Assertion. *Il n'y a plus de puissances négatives de f_1' !*

• **Preuve : Multiplier par $\big(f_1'\big)^{-a_{\min}}$ et faire $f_1' = 0$;**

$$\begin{aligned}
\Lambda^3\big|_{f_1'=0} &= -f_1'' f_2', \\
\Lambda_1^5\big|_{f_1'=0} &= 3(f_1'' f_2') f_1'', \\
\Lambda_{1,1}^7\big|_{f_1'=0} &= -15\, (f_1'' f_2') f_1'' f_1'', \\
M^8\big|_{f_1'=0} &= 3(f_1'''' f_2')(f_1'' f_2') - 12(f_1''' f_2'' - f_1'' f_2''')(f_1'' f_2') - \\
&\qquad - 5(f_1''' f_2')(f_1''' f_2').
\end{aligned}$$

Lemme. *Une identité polynomiale du type :*

$$0 \equiv \mathsf{Q}\big(\Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big) + \Lambda_1^5\,\mathsf{R}\big(\Lambda^3, \Lambda_{1,1}^7, M^8\big)\Big|_{f_1'=0}$$

peut être satisfaite seulement si $\mathsf{Q} = \mathsf{P} = 0$. □

Question : Comment comprendre et prévoir l'existence de l'invariant M^8 ?

Réponse partielle : les trois invariants fondamentaux évidents Λ^3, Λ_1^5 et $\Lambda_{1,1}^7$ ont beau être algébriquement indépendants, ils cessent de l'être lorqu'on pose $f_1' = 0$, car on a la relation :

$$0 \equiv -3\,\Lambda^3\;\Lambda_{1,1}^7\Big|_{f_1'=0} + 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_1^5\Big|_{f_1'=0}.$$

En vérité, nous connaissons déjà la syzygie :

$$0 \equiv f_1' f_1'\,M^8 - 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,1}^7 + 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_1^5,$$

mais si nous avions l'ambition de généraliser le cas $\nu = 2$, $\kappa = 4$, nous devrions nous imaginer être dans l'ignorance de cette syzygie, et il nous faudrait pouvoir la reconstituer *a priori*.

Conclusion absolument cruciale : Derrière les relations entre les polynômes fondamentaux doublement invariants qui sont satisfaites lorsqu'on pose $f_1' = 0$ se cachent des « termes fantômes » qui révèlent des invariants supplémentaires.

Plan pour l'étude de $\mathcal{DS}_{2,m}^{\kappa}T_X^*$ dans le cas général

□ Généraliser immédiatement l'expression rationnelle :

$$\sum_{-\frac{\kappa-1}{\kappa}m\leqslant a\leqslant m} (f_1')^a \, \mathsf{P}_a\big(f_2', \Lambda^3, \Lambda_1^5, \Lambda_{1,1}^7, \Lambda_{1,1,1}^9, \ldots, \Lambda_{1,\ldots,1}^{2\kappa-1}\big).$$

□ Engendrer récursivement un système de polynômes fondamentaux invariants par reparamétrisation et invariants par l'action unipotente.

□ Engendrer toutes les syzygies entre ces invariants complets.

□ Gröbnériser l'idéal obtenu en posant $f_1' = 0$.

□ Établir que les syzygies pour $(\cdot)\big|_{f_1'=0}$ proviennent des syzygies complètes.

□ Calculer l'espace vectoriel des monômes restants modulo la base de Gröbner réduite :

$$\mathbb{C}\big[\textsf{Invariants doubles}\big]\big/\textsf{syzygies}.$$

□ Déduire comme corollaire une description complète de $\mathcal{DS}_{2,m}^{\kappa}T_X^*$ en faisant agir le groupe linéaire (remarque : la base de Gröbner $\mathcal{DS}_{2,m}^{\kappa}T_X^*$ n'est pas héritée, mais il serait inutile, pour le calcul de caractéristique d'Euler, de gröbnériser $\mathcal{DS}_{2,m}^{\kappa}T_X^*$).

• **Question :** Comment engendrer tous les invariants fondamentaux ?

• **Produit croisé entre invariants :** supposer connus deux polynômes homogènes invariants P de poids m et Q de poids n :

$$\mathsf{P}\big(j^{\kappa}g\big) = \big(\phi'\big)^{m}\,\mathsf{P}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big),$$
$$\mathsf{Q}\big(j^{\tau}g\big) = \big(\phi'\big)^{n}\,\mathsf{Q}\big((j^{\tau}f)\circ\phi\big),$$

où l'on a posé $g := f\circ\phi$.

• **Différentier** par rapport à la variable $z\in\mathbb{C}$ revient à appliquer l'**opérateur de différentiation totale** :

$$\mathsf{D} := \sum_{\lambda\in\mathbb{N}} \frac{\partial(\bullet)}{\partial f^{(\lambda)}}\cdot f^{(\lambda+1)},$$

ce qui donne ici :

$$\big[\mathsf{DP}\big]\big(j^{\kappa+1}g\big) = m\,\phi''\,\phi'^{\,m-1}\,\mathsf{P}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) + \\ + \phi'^{\,m}\,\phi'\,\big[\mathsf{DP}\big]\big((j^{\kappa+1}f)\circ\phi\big),$$
$$\big[\mathsf{DQ}\big]\big(j^{\tau+1}g\big) = n\,\phi''\,\phi'^{\,n-1}\,\mathsf{Q}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) + \\ + \phi'^{\,n}\,\phi'\,\big[\mathsf{DQ}\big]\big((j^{\tau+1}f)\circ\phi\big).$$

• **Éliminer la dérivée seconde ϕ''** : effectuer le **produit croisé** :

$$
\begin{vmatrix}
\big[\mathsf{DP}\big]\big(j^{\kappa+1}g\big) & m\,\mathsf{P}\big(j^{\kappa}g\big) \\
\big[\mathsf{DQ}\big]\big(j^{\tau+1}g\big) & n\,\mathsf{Q}\big(j^{\tau}g\big)
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
m\,\phi''\,\phi'^{m-1}\,\mathsf{P}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) + \phi'^{m+1}\,\big[\mathsf{DP}\big]\big((j^{\kappa+1}f)\circ\phi\big) & m\,\phi'^{m}\,\mathsf{P}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) \\
n\,\phi''\,\phi'^{n-1}\,\mathsf{Q}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) + \phi'^{n+1}\,\big[\mathsf{DQ}\big]\big((j^{\tau+1}f)\circ\phi\big) & n\,\phi'^{n}\,\mathsf{Q}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big)
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\phi'^{m+1}\,\big[\mathsf{DP}\big]\big((j^{\kappa+1}f)\circ\phi\big) & m\,\phi'^{m}\,\mathsf{P}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big) \\
\phi'^{n+1}\,\big[\mathsf{DQ}\big]\big((j^{\tau+1}f)\circ\phi\big) & n\,\phi'^{n}\,\mathsf{Q}\big((j^{\kappa}f)\circ\phi\big)
\end{vmatrix}
$$

$$
= \phi'^{m+n+1}
\begin{vmatrix}
\big[\mathsf{DP}\big]\big(j^{\kappa+1}f\big) & m\,\mathsf{P}\big(j^{\kappa}f\big) \\
\big[\mathsf{DQ}\big]\big(j^{\tau+1}f\big) & n\,\mathsf{Q}\big(j^{\tau}f\big)
\end{vmatrix}
$$

qui s'avère ainsi constituer un nouvel invariant de poids $m+n+1$.

Observation. *Toute paire d'invariants produit automatiquement un nouvel invariant :*

$$
\boxed{\big[\mathsf{P},\,\mathsf{Q}\big] := n\,\mathsf{DP}\cdot\mathsf{Q} - m\,\mathsf{P}\cdot\mathsf{DQ}},
$$

qui est évidemment antisymétrique en P *et en* Q.

Trois familles génératrices de syzygies :

$(\mathcal{J}ac)$ $\quad \boxed{0 \equiv \big[\big[\mathsf{P},\,\mathsf{Q}\big],\,\mathsf{R}\big] + \big[\big[\mathsf{R},\,\mathsf{P}\big],\,\mathsf{Q}\big] + \big[\big[\mathsf{Q},\,\mathsf{R}\big],\,\mathsf{P}\big]}.$

$(\mathcal{P}lck_1)$ $\quad \boxed{0 \equiv m\,\mathsf{P}\,\big[\mathsf{Q},\,\mathsf{R}\big] + o\,\mathsf{R}\,\big[\mathsf{P},\,\mathsf{Q}\big] + n\,\mathsf{Q}\,\big[\mathsf{R},\,\mathsf{P}\big]}.$

$(\mathcal{P}lck_2)$ $\quad \boxed{0 \equiv \big[\mathsf{P},\,\mathsf{Q}\big]\cdot\big[\mathsf{R},\,\mathsf{S}\big] + \big[\mathsf{S},\,\mathsf{P}\big]\cdot\big[\mathsf{R},\,\mathsf{Q}\big] + \big[\mathsf{Q},\,\mathsf{S}\big]\cdot\big[\mathsf{R},\,\mathsf{P}\big]}.$

Analogie avec la théorie classique des invariants : σ-process et Ω-process.

Idéal des relations pour $\mathcal{DS}_{2,m}T^*_X$

• **Bases de Gröbner sur ordinateur :** trois calculs distincts sur Maple conduisent aux neuf relations fondamentales suivantes entre les neuf invariants fondamentaux de $\mathcal{DS}_2^4 T_X^*$:

$$\left[0 \overset{1}{\equiv} f_2'\,\Lambda_1^5 - f_1'\,\Lambda_2^5 - 3\,\Lambda^3\,\Lambda^3, \right.$$

$$\left[\begin{aligned} & 0 \overset{2}{\equiv} f_2'\,\Lambda_{1,1}^7 - f_1'\,\Lambda_{1,2}^7 - 5\,\Lambda^3\,\Lambda_1^5, \\ & 0 \overset{3}{\equiv} f_2'\,\Lambda_{1,2}^7 - f_1'\,\Lambda_{2,2}^7 - 5\,\Lambda^3\,\Lambda_2^5, \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} & 0 \overset{4}{\equiv} f_1'\,f_1'\,M^8 - 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,1}^7 + 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_1^5, \\ & 0 \overset{5}{\equiv} f_1'\,f_2'\,M^8 - 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,2}^7 + 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_2^5, \\ & 0 \overset{6}{\equiv} f_2'\,f_2'\,M^8 - 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{2,2}^7 + 5\,\Lambda_2^5\,\Lambda_2^5, \end{aligned} \right.$$

$$\left[\begin{aligned} & 0 \overset{7}{\equiv} f_1'\,\Lambda^3\,M^8 - \Lambda_1^5\,\Lambda_{1,2}^7 + \Lambda_2^5\,\Lambda_{1,1}^7, \\ & 0 \overset{8}{\equiv} f_2'\,\Lambda^3\,M^8 - \Lambda_1^5\,\Lambda_{2,2}^7 + \Lambda_2^5\,\Lambda_{1,2}^7, \end{aligned} \right.$$

$$\left[0 \overset{9}{\equiv} 5\,\Lambda^3\,\Lambda^3\,M^8 - \Lambda_{2,2}^7\,\Lambda_{1,1}^7 + \Lambda_{1,2}^7\,\Lambda_{1,2}^7. \right.$$

• **Reconstitution organisée des neuf relations fondamentales :** au niveau inférieur $\kappa = 3$, cinq polynômes fondamentaux existent :

$$\begin{pmatrix} f_1' & f_2' & \Lambda^3 & \Lambda_1^5 & \Lambda_2^5 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \big[[f_1',\, f_2'],\, \Lambda^3\big] + \big[[\Lambda^3,\, f_1'],\, f_2'\big] + \big[[f_2',\, \Lambda^3],\, f_1'\big] \\
&\equiv \big[-\Lambda^3,\, \Lambda^3\big] + \big[\Lambda_1^5,\, f_1'\big] + \big[-\Lambda_2^5,\, f_1'\big] \\
&\equiv 0 + \Lambda_{1,2}^7 - \Lambda_{2,1}^7.
\end{aligned}
$$

- $C_5^3 =$ **10 identités** $\big(\mathcal{P}lck_1\big)$ **:**

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{a}{\equiv} f_1'\,[f_2',\, \Lambda^3] + 3\,\Lambda^3\,[f_1',\, f_2'] + f_2'\,[\Lambda^3,\, f_1'], \\
0 &\overset{b}{\equiv} f_1'\,[f_2',\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[f_1',\, f_2'] + f_2'\,[\Lambda_1^5,\, f_1'], \\
0 &\overset{c}{\equiv} f_1'\,[f_2',\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[f_1',\, f_2'] + f_2'\,[\Lambda_2^5,\, f_1'], \\
0 &\overset{d}{\equiv} f_1'[\Lambda^3,\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[f_1',\, \Lambda^3] + 3\,\Lambda^3\,[\Lambda_1^5,\, f_1'], \\
0 &\overset{e}{\equiv} f_1'\,[\Lambda^3,\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[f_1',\, \Lambda^3] + 3\,\Lambda^3\,[\Lambda_2^5,\, f_1'], \\
0 &\overset{f}{\equiv} f_1'\,[\Lambda_1^5,\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[f_1',\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[\Lambda_2^5,\, f_1'], \\
0 &\overset{g}{\equiv} f_2'\,[\Lambda^3,\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[f_2',\, \Lambda^3] + 3\,\Lambda^3\,[\Lambda_1^5,\, f_2'], \\
0 &\overset{h}{\equiv} f_2'\,[\Lambda^3,\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[f_2',\, \Lambda^3] + 3\,\Lambda^3\,[\Lambda_2^5,\, f_2'], \\
0 &\overset{i}{\equiv} f_2'\,[\Lambda_1^5,\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[f_2',\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[\Lambda_2^5,\, f_2'], \\
0 &\overset{j}{\equiv} 3\,\Lambda^3\,[\Lambda_1^5,\, \Lambda_2^5] + 5\,\Lambda_2^5\,[\Lambda^3,\, \Lambda_1^5] + 5\,\Lambda_1^5\,[\Lambda_2^5,\, \Lambda^3].
\end{aligned}
$$

• $\mathcal{C}_5$ **5 identités** (Iden_2) :

$$0 \overset{k}{\equiv} [f'_1,\, f'_2] \cdot [\Lambda^3,\, \Lambda^5_1] + [\Lambda^5_1,\, f'_1] \cdot [\Lambda^3,\, f'_2] + [f'_2,\, \Lambda^5_1] \cdot [\Lambda^3,\, f'_1],$$

$$0 \overset{l}{\equiv} [f'_1,\, f'_2] \cdot [\Lambda^3,\, \Lambda^5_1] + [\Lambda^5_2,\, f'_1] \cdot [\Lambda^3,\, f'_2] + [f'_2,\, \Lambda^5_2] \cdot [\Lambda^3,\, f'_1],$$

$$0 \overset{m}{\equiv} [f'_1,\, f'_2] \cdot [\Lambda^5_1,\, \Lambda^5_2] + [\Lambda^5_2,\, f'_1] \cdot [\Lambda^5_1,\, f'_2] + [f'_2,\, \Lambda^5_2] \cdot [\Lambda^5_1,\, f'_1],$$

$$0 \overset{n}{\equiv} [f'_1,\, \Lambda^3] \cdot [\Lambda^5_1,\, \Lambda^5_2] + [\Lambda^5_2,\, f'_1] \cdot [\Lambda^5_1,\, \Lambda^3] + [\Lambda^3,\, \Lambda^5_2] \cdot [\Lambda^5_1,\, f'_1],$$

$$0 \overset{o}{\equiv} [f'_2,\, \Lambda^3] \cdot [\Lambda^5_1,\, \Lambda^5_2] + [\Lambda^5_2,\, f'_1] \cdot [\Lambda^5_1,\, \Lambda^3] + [\Lambda^3,\, \Lambda^5_2] \cdot [\Lambda^5_1,\, f'_2].$$

• **Observation :** Les **9** relations fondamentales obtenues sur Maple s'identifient, modulo les redondances, avec les **10** + **5** = **15** relations ainsi écrites automatiquement.

• **Observation :** parmi les **62** relations obtenues par Rousseau dans sa thèse (15h de calcul sur Maple) entre les **16** invariants fondamentaux de $\mathcal{DS}^3_{3,m}T^*_X$, seulement **30** d'entre elles sont fondamentales et ces **30** relations proviennent **dans leur intégralité** de nos trois familles fondamentales de syzygies.

• **Réflexion sur la puissance comparée entre calcul digital et calcul manuel** (digression orale).

VI. Jets d'ordre 5 en dimension 2

• **Appliquer nos quatre procédés générateurs** en dimension $\nu = 2$ aux jets d'ordre $\kappa = 5$ en partant du niveau $\kappa = 4$, doté des 9 invariants connus :

$$\left(f_1' \quad f_2' \quad \Lambda^3 \quad \Lambda_1^5 \quad \Lambda_2^5 \quad \Lambda_{1,1}^7 \quad \Lambda_{1,2}^7 \quad \Lambda_{2,2}^7 \quad M^8 \right).$$

• **Nombre de crochets :** $C_9^2 = \mathbf{36}$.

• **Relations de Jacobi :** utilisées pour éliminer quelques invariants superflus.

• **Nombre de relations** $\left(\mathcal{P}lck_1\right)$ **:** $C_9^3 = \mathbf{84}$.

• **Nombre de relations** $\left(\mathcal{P}lck_2\right)$ **:** $C_9^4 = \mathbf{126}$.

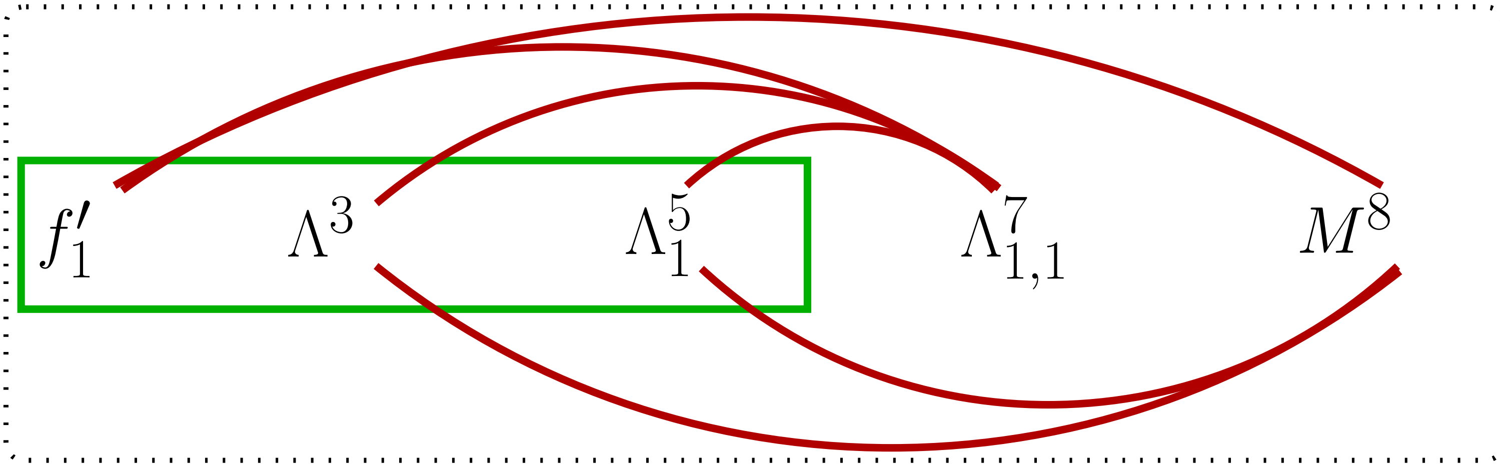
$\boxed{\triangle}$ **On attend donc a priori : 36** invariants ayant **210** relations entre eux.

• **Étape 1 :** calculer les **36** crochets et normaliser les expressions obtenues.

• **Étape 2 :** éliminer quelques crochets redondants grâce à l'identité de Jacobi.

• **Étape 3 :** calculer les **210** relations.

• **Étape 4 :** gröbnériser l'idéal obtenu.



• **Tenir compte des crochets déjà calculés à l'étage** $\kappa = 4$.

• **Liste de crochets à étudier :**

$$
\begin{array}{cc}
[\Lambda^7_{i,j},\, f'_k] & [M^8,\, f'_i] \\
[\Lambda^7_{i,j},\, \Lambda^3] & [M^8,\, \Lambda^3] \\
[\Lambda^7_{i,j},\, \Lambda^5_k] & [M^8,\, \Lambda^5_i] \\
[\Lambda^7_{i,j},\, \Lambda^7_{k,l}] & [M^8,\, \Lambda^7_{i,j}] \\
 & [M^8,\, M^8],
\end{array}
$$

• **Rappeler la liste des invariants normalisés pour les jets d'ordre** $\kappa = 4$ **:**

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& f'_i \\
\Lambda^3 &:= \Delta^{1,2} \\
\Lambda^5_i &:= \Delta^{1,3}\, f'_i - 3\,\Delta^{1,2}\, f''_i \\
\Lambda^7_{i,j} &:= \Delta^{1,4}\, f'_i f'_j + 4\,\Delta^{2,3}\, f'_i f'_j - 5\,\Delta^{1,3}\big(f''_i f'_j + f'_i f''_j\big) + 15\,\Delta^{1,2}\, f''_i f''_j \\
M^8 &:= 3\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 12\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2} - 5\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}
\end{aligned}
}.
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathsf{D} f_i' &= f_i'' \\
\mathsf{D} \Lambda^3 &= \Delta^{1,3} \\
\mathsf{D} \Lambda_i^5 &= \Delta^{1,4}\, f_i' + 4\,\Delta^{2,3}\, f_i' - 5\,\Delta^{1,3}\, f_i'' \\
\mathsf{D} \Lambda_{i,j}^7 &= \Delta^{1,5}\, f_i' f_j' + 5\,\Delta^{2,4}\, f_i' f_j' - 4\,\Delta^{1,4}\big(f_i'' f_j' + f_i' f_j''\big) - \\
&\qquad - 16\,\Delta^{2,3}\big(f_i'' f_j' + f_i' f_j''\big) - 5\,\Delta^{1,3}\big(f_i''' f_j' + f_i' f_j'''\big) + \\
&\qquad\qquad + 35\,\Delta^{1,3}\big(\, f_i'' f_j''\big) \\
\mathsf{D} M^8 &= 3\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} + 15\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 2\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}
\end{aligned}
}\,,
$$

● **Quelle normalisation ?**

● **Réponse :** On doit tenir compte des relations évidentes qui existent dans les algèbres plückériennes :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
0 &\equiv \Delta^{2,3}\, f_i' - \Delta^{1,3}\, f_i'' + \Delta^{1,2}\, f_i''' \\
0 &\equiv \Delta^{2,4}\, f_i' - \Delta^{1,4}\, f_i'' + \Delta^{1,2}\, f_i''''
\end{aligned}
}\,,
$$

● **Boîte noire numéro 1 :** les calculs de normalisation.

● **Boîte noire numéro 2 :** les calculs de simplification et de nettoyage final des crochets.

● **Étudier au moins un exemple crucial, la délicate cinquième famille de crochets :**

$$
\begin{aligned}
\big[\Lambda_{i,j}^7,\,\Lambda_k^5\big] &= 5\,\mathsf{D}\Lambda_{i,j}^7\cdot\Lambda_k^5 - 7\,\Lambda_{i,j}^7\cdot\mathsf{D}\Lambda_k^5 \\
&= 5\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3}\,f_i'f_j'f_k' + 25\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3}\,f_i'f_j'f_k' - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4}\,f_i'f_j'f_k' - \\
&\quad - 56\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,4}\,f_i'f_j'f_k' - 112\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\,f_i'f_j'f_k' - 15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2}\,f_i'f_j'f_k'' - \\
&\quad - 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2}\,f_i'f_j'f_k'' + 15\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\big(f_i''f_j' + f_i'f_j''\big)f_k' + \\
&\quad + 35\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,f_i'f_j'f_k'' + 60\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\big(f_i''f_j' + f_i'f_j''\big)f_k' - \\
&\quad - 10\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,f_i'f_j'f_k'' - 25\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\big(f_i'''f_j' + f_i'f_j'''\big)f_k' + \\
&\quad + 175\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,f_i''f_j''f_k' - 100\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\big(f_i''f_j' + f_i'f_j''\big)f_k'' + \\
&\quad + 60\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2}\big(f_i''f_j' + f_i'f_j''\big)f_k'' - 105\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2}\,f_i''f_j''f_k' + \\
&\quad + 240\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\big(f_i''f_j' + f_i'f_j''\big)f_k'' - 420\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\,f_i''f_j''f_k'.
\end{aligned}
$$

Ces six invariants ne sont pas indépendants entre eux, car $(\mathcal{J}ac)$ fournit les relations :

$$
0 \equiv \big[\big[f_i',\,\Lambda_j^5\big],\,\Lambda_k^5\big] + \big[\big[\Lambda_k^5,\,f_i'\big],\,\Lambda_j^5\big] + \big[\big[\Lambda_j^5,\,\Lambda_k^5\big],\,f_i'\big],
$$

qui se réduisent à $0 \equiv 0$ lorsque $j = k$, mais qui octroient deux relations lorsque $j \neq k$, à savoir :

$$
\begin{aligned}
\big[\Lambda_{1,2}^7,\,\Lambda_1^5\big] &= \big[\Lambda_{1,1}^7,\,\Lambda_2^5\big] + 5\,M^8\,\Lambda_1^5 + 5\,\Lambda^3\,M_1^{10}, \\
\big[\Lambda_{1,2}^7,\,\Lambda_2^5\big] &= \big[\Lambda_{2,2}^7,\,\Lambda_1^5\big] - 5\,M^8\,\Lambda_2^5 - 5\,\Lambda^3\,M_2^{10},
\end{aligned}
$$

et qui nous permettent de n'avoir à considérer que les quatre (au lieu de six) nouveaux invariants :

$$
\begin{aligned}
K_{1,1,1}^{13} &:= \big[\Lambda_{1,1}^7,\,\Lambda_1^5\big], & K_{1,1,2}^{13} &:= \big[\Lambda_{1,1}^7,\,\Lambda_2^5\big], \\
K_{2,2,1}^{13} &:= \big[\Lambda_{2,2}^7,\,\Lambda_1^5\big], & K_{2,2,2}^{13} &:= \big[\Lambda_{2,2}^7,\,\Lambda_2^5\big].
\end{aligned}
$$

Toutefois, le travail n'est pas terminé !

Nous constatons que $K^{13}_{1,1,1}$ **est divisible par** f_1', donc nous devons introduire l'invariant de poids 12 :

$$
\begin{aligned}
K^{12}_{1,1} &:= \frac{1}{f_1'}\left[\Lambda^7_{1,1},\, \Lambda^5_1\right] \\
&= f_1' f_1' \Big(5\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3} + 25\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4} - 56\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,4} - \\
&\quad - 112\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\Big) + f_1' f_1'' \Big(- 15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} - 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} + \\
&\quad + 65\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 110\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + f_1 f_1''' \Big(- 50\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f_1'' f_1'' \Big(- 25\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + 15\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 60\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big).
\end{aligned}
$$

Pareillement, $K^{13}_{2,2,2}$ étant divisible par f_2', nous devons introduire $K^{12}_{2,2} := \frac{1}{f_1'}\left[\Lambda^7_{2,2},\, \Lambda^5_2\right]$. Mais les deux invariants restants ne sont divisibles ni par f_1' ni par f_2', et lorsqu'on fera agir le groupe linéaire pour obtenir tous les polynômes invariants à partir des polynômes doublement invariants, **il n'est pas clair du tout que** $K^{13}_{1,1,2}$ **et** $K^{13}_{2,2,1}$ **découlent de** $K^{12}_{1,1}$.

Lemme. *Si l'on introduit, pour tous indices i, j appartenant à $\{1, 2\}$, les quatre invariants de poids 12 :*

$$
\begin{aligned}
K^{12}_{i,j} &:= f_i' f_j' \Big(5\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3} + 25\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4} - 56\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,4} - \\
&\quad - 112\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\Big) + \frac{(f_i' f_j'' + f_i'' f_j')}{2} \Big(- 15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} - 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} + \\
&\quad + 65\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 110\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \frac{(f_i' f_j''' + f_i''' f_j')}{2} \Big(- 50\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f_i'' f_j'' \Big(- 25\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + 15\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 60\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big),
\end{aligned}
$$

alors les quatre invariants $K_{1,1,1}$, $K_{1,1,2}$, $K_{2,2,1}$ *et* $K_{2,2,2}$ *précédents sont réobtenus grâce aux quatre relations :*

$$
\begin{aligned}
K^{13}_{1,1,1} &= f_1'\, K^{12}_{1,1}, \\
K^{13}_{1,1,2} &= f_1'\, K^{12}_{1,2} - \frac{5}{2}\,\Lambda^3\, M_1^{10} - 5\,\Lambda_1^5\, M^8, \\
K^{13}_{2,2,1} &= f_2'\, K^{12}_{2,1} + \frac{5}{2}\,\Lambda^3\, M_2^{10} + 5\,\Lambda_2^5\, M^8, \\
K^{13}_{2,2,2} &= f_2'\, K^{12}_{2,2}.
\end{aligned}
$$

En conclusion, nous devons introduire les quatre invariants $K^{12}_{1,1}$, $K^{12}_{1,2}$, $K^{12}_{2,1}$ et $K^{12}_{2,2}$ (en fait $K^{12}_{1,2} = K^{12}_{2,1}$).

Démonstration. **Calcul direct et douloureux :** grâce à la permutation $1 \leftrightarrow 2$ des indices (noter que les $\Delta^{\alpha,\beta}$ changent de signe), il suffit d'établir la deuxième identité. Nous réécrivons tout d'abord, en repartant de l'expression obtenue pour $\left[\Lambda^7_{1,1},\, \Lambda^5_2\right]$:

$$
\begin{aligned}
K^{13}_{1,1,2} = f_1'f_1'f_2' \Big(& 5\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3} + 25\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4} - 56\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,4} - \\
& - 112\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\Big) + f_1'f_1'f_2''\Big(- 15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} - 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} + \\
& + 35\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} - 10\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + f_1'f_1''f_2'\Big(30\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 120\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
& + f_1'f_1''f_2'\Big(- 50\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + f_1''f_1''f_2'\Big(175\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} - 105\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} - \\
& - 420\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big) + f_1'f_1''f_2''\Big(- 200\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + 120\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 480\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big).
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous effectuons la soustraction :

$$
\begin{aligned}
K^{13}_{1,1,1} - f'_1\,K^{12}_{1,2} = \\
&= f'_1 f'_1 f''_2\Big(-\frac{15}{2}\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} - \frac{75}{2}\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} + \frac{5}{2}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} - 65\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f'_1 f''_1 f'_2\Big(\frac{15}{2}\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} + \frac{75}{2}\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} - \frac{5}{2}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 65\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f'_1 f'''_1 f'_2\Big(-\frac{50}{2}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f'_1 f'_1 f'''_2\Big(\frac{50}{2}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f''_1 f''_1 f'_2\Big(175\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} - 105\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} - 420\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big) + \\
&\quad + f''_1 f'_1 f''_2\Big(-175\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + 105\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 420\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big).
\end{aligned}
$$

Remarquablement, les coefficients polynomiaux complexes étant opposés par paires de lignes qui se suivent, nous voyons des déterminants 2×2 se reformer :

$$
\begin{aligned}
K^{13}_{1,1,1} - f'_1\,K^{12}_{1,2} = \\
&= f'_1\Big(-\frac{15}{2}\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} - \frac{75}{2}\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} + \frac{5}{2}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} - \\
&\qquad - 65\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2}\Big) + f'_1\Big(\frac{50}{2}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}\Big) + \\
&\quad + f''_1\Big(105\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} + 420\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} - 175\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big).
\end{aligned}
$$

Comme les deux premiers termes de la première ligne ressemblent à ceux de $\Lambda^3\,M_1^{10}$, nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{5}{2}\,\Lambda^3\,M_1^{10} + \\
&\quad + f'_1\Big(-\frac{30}{2}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\Delta^{1,2} - 60\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} + \frac{50}{2}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
&\quad + f''_1\Big(45\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} + 180\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} - 75\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}\Big).
\end{aligned}
$$

l'expression développée de $-5\,\Lambda_1^5\,M^8$, ce qui nous donne bien la relation annoncée : $K_{1,1,2}^{13} - f_1'\,K_{1,2}^{12} = -\frac{5}{2}\,\Lambda^3\,M_1^{10} - 5\,\Lambda_1^5\,M^8$. □

Théorème. *Tout polynôme* $\mathsf{P}^{2\times\mathrm{inv}}\big(j^5 f\big)$ *de poids* m *invariant par reparamétrisation et par rapport à l'action unipotente s'exprime polynomialement en fonction de onze polynômes fondamentaux :*

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} f_1' & \Lambda^3 & \Lambda_1^5 & \Lambda_{1,1}^7 & M^8 \\ & \Lambda_{1,1,1}^9 & M_1^{10} & N^{12} & K_{1,1}^{12} \\ & & & H_1^{14} & F_{1,1}^{16} \end{array}}$$

dont l'idéal des relations est constitué des quinze équations de degré $\leqslant 3$ *suivantes :*

$$0 \overset{8}{\equiv} -f_1' f_1'\,M^8 - 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_1^5 + 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,1}^7,$$
$$0 \overset{10}{\equiv} -f_1' f_1'\,M_1^{10} - 7\,\Lambda_1^5\,\Lambda_{1,1}^7 + 3\,\Lambda^3\,\Lambda_{1,1,1}^9,$$
$$0 \overset{13}{\equiv} -f_1'\,N^{12} - 8\,\Lambda_1^5\,M^8 + 3\,\Lambda^3\,M_1^{10},$$
$$0 \overset{15}{\equiv} -f_1' f_1'\,K_{1,1}^{12} - 7\,\Lambda_{1,1}^7\,\Lambda_{1,1}^7 + 5\,\Lambda_1^5\,\Lambda_{1,1,1}^9,$$
$$0 \overset{18}{\equiv} -f_1'\,H_1^{14} - 8\,\Lambda_{1,1}^7\,M^8 + 5\,\Lambda_1^5\,M_1^{10},$$
$$0 \overset{25}{\equiv} -f_1'\,F_{1,1}^{16} - 8\,M^8\,\Lambda_{1,1,1}^9 + 7\,\Lambda_{1,1}^7\,M_1^{10},$$

$$0 \equiv -3\,\Lambda^3\,K^{12}_{1,1} - 7\,\Lambda^7_{1,1}\,M^8 + 5\,\Lambda^5_1\,M^{10}_1,$$

$$0 \overset{54}{\equiv} -3\,\Lambda^3\,H^{14}_1 - 8\,f_1'\,M^8\,M^8 + 5\,\Lambda^5_1\,N^{12},$$

$$0 \overset{61}{\equiv} -3\,\Lambda^3\,F^{16}_{1,1} - 8\,f_1'\,M^8\,M^{10}_1 + 7\,\Lambda^7_{1,1}\,N^{12},$$

$$0 \overset{71}{\equiv} -5\,\Lambda^5_1\,F^{16}_{1,1} - 8\,f_1'\,M^8\,K^{12}_{1,1} + 7\,\Lambda^7_{1,1}\,H^{14}_1,$$

$$0 \overset{23'}{\equiv} \Lambda^5_1\,K^{12}_{1,1} + M^8\,\Lambda^9_{1,1,1} - \Lambda^7_{1,1}\,M^{10}_1,$$

$$0 \overset{26'}{\equiv} \Lambda^5_1\,H^{14}_1 + f_1'\,M^8\,M^{10}_1 - \Lambda^7_{1,1}\,N^{12},$$

$$0 \overset{33'}{\equiv} \Lambda^5_1\,F^{16}_{1,1} + f_1'\,M^{10}_1\,M^{10}_1 - \Lambda^9_{1,1,1}\,N^{12},$$

$$0 \overset{43'}{\equiv} \Lambda^7_{1,1}\,F^{16}_{1,1} + f_1'\,M^{10}_1\,K^{12}_{1,1} - \Lambda^9_{1,1,1}\,H^{14}_1,$$

$$0 \overset{98'}{\equiv} M^8\,F^{16}_{1,1} + N^{12}\,K^{12}_{1,1} - M^{10}_1\,H^{14}_1,$$

et tout polynôme $\mathsf{P}\big(j^5 f\big)$ *invariant par reparamétrisation s'exprime polynomialement en fonction de vingt-cinq invariants fondamentaux :*

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} f_1' & f_2' & \Lambda^3 & \Lambda^5_1 & \Lambda^5_2 & \Lambda^7_{1,1} & \Lambda^7_{1,2} & \Lambda^7_{2,2} & M^8 \\ & \Lambda^9_{1,1,1} & & \Lambda^9_{1,2,1} & & \Lambda^9_{2,1,2} & \Lambda^9_{2,2,2} & M^{10}_1 & M^{10}_2 \\ & & & & N^{12} & K^{12}_{1,1} & K^{12}_{1,2} & K^{12}_{2,1} & K^{12}_{2,2} \\ & & & & H^{14}_1 & H^{14}_2 & F^{16}_{1,1} & F^{16}_{1,2} & F^{16}_{2,2} \end{array}},$$

qui sont donnés par les formules explicites normalisées :

$$
\begin{aligned}
\Lambda^9_{i,j,k} := \;& \Delta^{1,5}\, f'_i f'_j f'_k + 5\,\Delta^{2,4}\, f'_i f'_j f'_k - \\
& - 4\,\Delta^{1,4}\big(f''_i f'_j + f'_i f''_j\big)\, f'_k - 7\,\Delta^{1,4}\, f'_i f'_j f''_k - \\
& - 16\,\Delta^{2,3}\big(f''_i f'_j + f'_i f''_j\big) f'_k - 28\,\Delta^{2,3}\, f'_i f'_j f''_k - \\
& - 5\,\Delta^{1,3}\big(f'''_i f'_j + f'_i f'''_j\big)\, f'_k + 35\,\Delta^{1,3}\big(f''_i f''_j f'_k + f''_i f'_j f''_k + f'_i f''_j f''_k\big) - \\
& - 105\,\Delta^{1,2}\, f''_i f''_j f''_k,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{10}_i := \;& \big[3\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} + 15\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 2\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\big]\, f'_i - \\
& - \big[24\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 96\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2} - 40\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\big] f''_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N^{12} := \;& 9\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} + 45\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} - 45\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} - \\
& - 90\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} + 40\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{12}_{i,j} := \;& f'_i f'_j \Big(5\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3} + 25\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3} - 7\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4} - 56\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,4} - 112\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\Big) + \\
& + \frac{(f'_i f''_j + f''_i f'_j)}{2}\Big(- 15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2} - 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2} + 65\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3} + 110\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
& + \frac{(f'_i f'''_j + f'''_i f'_j)}{2}\Big(- 50\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big) + \\
& + f''_i f''_j\Big(- 25\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + 15\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} + 60\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H^{14}_i := \;& \Big(15\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} + 75\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} + 5\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} + \\
& + 170\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3} - 24\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2} - 192\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2} - \\
& - 384\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big)\, f'_i + \Big(- 45\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} - 225\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2} + \\
& + 225\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} + 450\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2} - 200\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big)\, f''_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+40\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}-60\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}+200\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}-\\
&-49\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}-422\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}-904\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\Big)\,f_i'f_j'+\\
&+\Big(-105\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}-525\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}+205\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}-\\
&-230\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}+96\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,2}+768\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}+\\
&+1536\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,2}\Big)\,\big(f_i''f_j'+f_i'f_j''\big)+\\
&+\Big(-200\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big)\,\big(f_i'''f_j'+f_i'f_j'''\big)+\\
&+\Big(315\,\Delta^{1,5}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2}+1575\,\Delta^{2,4}\,\Delta^{1,2}\,\Delta^{1,2}-1575\,\Delta^{1,4}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}-\\
&-3150\,\Delta^{2,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,2}+1400\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\,\Delta^{1,3}\Big)\,f_i''f_j'',
\end{aligned}
$$

où les indices i, j et k appartiennent à $\{1,2\}$.

• **Remarque :** le travail de nettoyage de ces invariants est considérable.

• **Remarque :** l'idéal des relations entre ces **25** invariants fondamentaux comporte **210** équations de degré $\leqslant 4$ qu'il ne serait nécessaire d'étudier que si nous devions calculer une base de Gröbner complète pour décrire explicitement $\mathcal{DS}_{2,m}^{5}T_X^*$. Mais comme on s'intéresse à un calcul de caractéristique d'Euler, il n'est nécessaire ou utile que de « gröbnériser » les quinze relations entre les onze polynômes doublement invariants — ouf !

complètes des onze polynômes fondamentaux doublement invariants :

$$f_1', \quad \Lambda^3, \quad \Lambda_1^5, \quad \Lambda_{1,1}^7, \quad M^8,$$
$$\Lambda_{1,1,1}^9, \quad M_1^{10}, \quad N^{12}, \quad K_{1,1}^{12},$$
$$H_1^{14}, \quad F_{1,1}^{16}$$

confirme la complétude des syzygies obtenues grâce à $\big(\mathcal{P}lck_1\big)$ et à $\big(\mathcal{P}lck_2\big)$.

• **Remarque :** pour exécuter le calcul final de caractéristique d'Euler, il faut encore choisir un ordre monomial adéquat avant d'engager le calcul d'une base de Gröbner réduite.

• **Enthousiasme pour l'effectivité en géométrie algébrique :** puisque la méthode fonctionne sur tous les cas connus, passons aux jets d'ordre $\kappa = \mathbf{6}$ en dimension $\nu = \mathbf{2}$!

VII. Prospective

• **Observation lucide :** le passage aux jets d'ordre $\kappa = 6$ ferait naître $C_{25}^2 = \mathbf{300}$ invariants construits par produit croisé dont la plupart s'étendraient sur une page et qui demanderaient un travail de normalisation considérable.

• **Estimation pessimiste :** le nombre de relations $\big(\mathcal{P}lck_1\big)$ et $\big(\mathcal{P}lck_2\big)$ s'élèverait à

$$C_{25}^3 + C_{25}^4 = \mathbf{14\,950},$$

et il n'y aurait que 7 relations jacobiennes permettant d'éliminer au plus 7 invariants redondants.

• **Objection encore encore plus pessimiste :** on devrait aussi partir en quête d'un certain nombre de relations algébriques exotiques, que nous ne savons pas faire découler d'un procédé algébrique uniforme, mais qui sont de toute façon englobées dans $\big(\mathcal{J}ac\big)$, $\big(\mathcal{P}lck_1\big)$ et $\big(\mathcal{P}lck_2\big)$. Par exemple, au niveau $\kappa = 5$, parmi les $35 - 25 = 10$ invariants superflus, il en est un, $E_{1,2}^{15}$ qui s'avère satisfaire :

$$0 \equiv 6\, E_{1,2}^{15} + 35\, \big(\Lambda_1^5\, M_2^{10} + \Lambda_2^5\, M_1^{10}\big) + f_1'\, H_2^{14} + f_2'\, H_1^{14},$$

relation que nous n'avons pu découvrir qu'en examinant les expressions complètes (et complexes) de ces invariants.

$\mathcal{C}^\kappa = \frac{\mathsf{A}^\kappa}{\mathsf{B}^\kappa}$ vaudront environ :

$$\mathcal{C}^{\kappa=5} \sim \mathbf{2,6}\cdots \qquad\qquad \mathcal{C}^{\kappa=6} \sim \mathbf{3,1}\cdots,$$

ce qui demeure encore extrêmement loin du nombre fatidique **11**.

• **Contre-objection résolument optimiste :** en vérité, nous savons qu'il suffit d'étudier les polynômes fondamentaux doublement invariants. Au niveau $\kappa = 6$, ils sont tout d'abord au nombre de $C_{11}^2 = \mathbf{55}$, mais ensuite moins d'une quarantaine. **Une étude exhaustive du fibré des jets de Demailly-Semple d'ordre 6 en dimension 2 n'est donc pas totalement inaccessible**, bien qu'il soit absolument clair qu'à partir des jets d'ordre **7**, plus rien ne soit à taille humaine.

• **À nos heures perdues, travaux accessibles :**

- □ Étudier les jets d'ordre $\kappa = 4$ en dimension $\nu = 3$.
- □ Élever l'ordre des jets en considérant un sous-fibré.

• **? Victoire annoncée du pessimisme par une estimation imparable :** il faudrait s'élever au moins jusqu'à $\kappa \geqslant 20$ pour que le quotient significatif $\mathcal{C}^\kappa$ de $\mathcal{DS}_{2,m}^\kappa T_X^*$ dépasse le nombre fatidique **11**, avec des milliers de milliards de milliards de milliards d'invariants fondamentaux linéairement indépendants !

Griffiths et conjecture de Kobayashi.

• **Noter maintenant :**

$$\Delta_{i,j}^{',''} := \begin{vmatrix} f_i' & f_j' \\ f_i'' & f_j'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{i,j}^{'','''} := \begin{vmatrix} f_i'' & f_j'' \\ f_i''' & f_j''' \end{vmatrix}, \qquad \textit{etc.},$$

pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ et aussi :

$$\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''} := \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix}.$$

• **Chercher** les polynômes invariants par reparamétrisation $\mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(j^4 f\big)$ qui sont aussi invariants par l'action unipotente définie par $\mathsf{u} \cdot f_1^{(\lambda)} = f_1^{(\lambda)}$, $\mathsf{u} \cdot f_2^{(\lambda)} = f_2^{(\lambda)} + u_a\, f_1^{(\lambda)}$ et $\mathsf{u} \cdot f_3^{(\lambda)} = f_3^{(\lambda)} + u_b\, f_2^{(\lambda)} + u_c\, f_1^{(\lambda)}$, où $u_a, u_b, u_c \in \mathbb{C}$, pour tout λ tel que $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, *i.e.* pour préciser, qui satisfont $\mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(\mathsf{u} \cdot j^4 f\big) \equiv \mathsf{P}^{\mathrm{inv}}\big(j^4 f\big)$ quels que soient $u_a, u_b, u_c \in \mathbb{C}$.

Théorème. *Tout polynôme $\mathsf{P}^{2\times\mathrm{inv}}\big(j^4 f\big)$ de poids m invariant par reparamétrisation et par rapport à l'action unipotente s'exprime polynomialement en fonction de dix polynômes fondamentaux* :

$$\boxed{\begin{array}{cccccc} f_1' & \Lambda_{1,2}^3 & \Lambda_{1,2;\,1}^5 & \Lambda_{1,2;\,1,1}^7 & M_{2,2}^8 \\ & D^6 & D_1^8 & N^{10} & E^{10} & L^{12} \end{array}},$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{1,2}^3 &:= \Delta_{1,2}^{',''},\\
\Lambda_{1,2;\,1}^5 &:= \Delta_{1,2}^{','''}\, f_1' - 3\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1'',\\
\Lambda_{1,2;\,1,1}^7 &:= \Delta_{1,2}^{',''''}\, f_1' f_1' + \Delta_{1,2}^{'',''''}\, f_1' f_1' - 10\,\Delta_{1,2}^{','''}\, f_1' f_1'' + 15\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1'' f_1'',\\
M_{2,2}^8 &:= 3\,\Delta_{1,2}^{',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''} + 12\,\Delta_{1,2}^{'',''''}\,\Delta_{1,2}^{',''} - 5\,\Delta_{1,2}^{','''}\,\Delta_{1,2}^{','''},\\
D^6 &:= \Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''},\\
D_1^8 &:= \Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\, f_1' - 6\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\, f_1'',\\
N^{10} &:= \Delta_{1,2,3}^{',\,''',\,''''}\, f_1' f_1' - 3\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\, f_1' f_1'' + 4\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\, f_1' f_1''' + 3\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\, f_1'' f_1'',\\
E^{10} &:= 3\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\,\Delta_{1,2}^{',''} - 6\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\,\Delta_{1,2}^{','''},\\
L^{12} &:= 5\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\,\Delta_{1,2}^{','''}\, f_1' - 15\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\,\Delta_{1,2}^{',''}\, f_1'' - 6\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\,\Delta_{1,2}^{',''''}\, f_1' -\\
&\qquad\qquad - 24\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\,\Delta_{1,2}^{'',\,'''}\, f_1' + 30\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\,\Delta_{1,2}^{','''}\, f_1'',
\end{aligned}
$$

et dont l'idéal des relations est constitué des six équations suivantes de degré $\leqslant 3$ *:*

$$
\left[
\begin{aligned}
0 &\equiv -f_1' f_1'\, M_{2,2}^8 - 5\,\Lambda_{1,2;\,1}^5\,\Lambda_{1,2;\,1}^5 + 3\,\Lambda_{1,2}^3\,\Lambda_{1,2;\,1,1}^7,\\
0 &\equiv -f_1'\, E^{10} - 6\,\Lambda_{1,2;\,1}^5\, D^6 + 3\,\Lambda_{1,2}^3\, D_1^8,\\
0 &\equiv -f_1'\, L^{12} - 6\,\Lambda_{1,2;\,1,1}^7\, D^6 + 5\,\Lambda_{1,2;\,1}^5\, D_1^8,\\
0 &\equiv -3\,\Lambda_{1,2}^3\, L^{12} - 6\, f_1'\, M_{2,2}^8\, D^6 + 5\,\Lambda_{1,2;\,1}^5\, E^{10},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\Big[\; 0 \equiv \Lambda_{1,2;\,1}^5\, L^{12} + f_1'\, D_1^8\, M_{2,2}^8 - \Lambda_{1,2;\,1,1}^7\, E^{10},
$$

$$
\Big[\; 0 \equiv -\Lambda_{1,2;\,1,1}^7\, D^6 + \Lambda_{1,2;\,1}^5\, D_1^8 + \Lambda_{1,2}^3\, N^{10}.
$$

IX. Caractéristiques d'Euler

Dimension $\nu = 3$

- **Caractéristique d'Euler du fibré de Schur :**

$$
-\chi\big(X,\, \Gamma^{l_1,l_2,l_3} T_X^*\big) =
$$

$$
= \frac{-\mathsf{c}_3}{1!\ 2!\ 3!}
\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 \end{vmatrix}
+ \frac{-\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 + \mathsf{c}_3}{0!\ 2!\ 4!}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 \\ l_1^4 & l_2^4 & l_3^4 \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \frac{-\mathsf{c}_1^3 + 2\,\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2 - \mathsf{c}_3}{0!\ 1!\ 5!}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ l_1^5 & l_2^5 & l_3^5 \end{vmatrix}
+ \mathrm{O}\big(|l|^5\big).
$$

- **Caractéristique d'Euler du fibré de Schur :**

$$\chi\big(X,\ \Gamma^{l_1,l_2,l_3,l_4} T_X^*\big) =$$

$$= \frac{-\mathsf{c}_1^4 + 3\,\mathsf{c}_1^2\mathsf{c}_2 - \mathsf{c}_2^2 - 2\,\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 + \mathsf{c}_4}{0!\ 1!\ 2!\ 7!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^7 & l_2^7 & l_3^7 & l_4^7 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{-\mathsf{c}_4}{1!\ 2!\ 3!\ 4!} \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^4 & l_2^4 & l_3^4 & l_4^4 \end{vmatrix} + \frac{-\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 + \mathsf{c}_4}{0!\ 2!\ 3!\ 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^5 & l_2^5 & l_3^5 & l_4^5 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{-\mathsf{c}_1^2\mathsf{c}_2 + \mathsf{c}_2^2 + \mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 - \mathsf{c}_4}{0!\ 1!\ 3!\ 6!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^3 & l_2^3 & l_3^3 & l_4^3 \\ l_1^6 & l_2^6 & l_3^6 & l_4^6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_3 - \mathsf{c}_2^2}{0!\ 1!\ 4!\ 5!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ l_1^4 & l_2^4 & l_3^4 & l_4^4 \\ l_1^5 & l_2^5 & l_3^5 & l_4^5 \end{vmatrix} + \mathrm{O}\big(|l|^9\big).$$

- **Étudier $\mathcal{M}_{\nu,m}^{\kappa} T_X^*$ en dimension quelconque.**

$\boxed{\textbf{Fin}}$