Institut Mathématique, Université de Rennes 1
Maîtrise de Mathématiques

ALGEBRE COMMUTATIVE

Examen Terminal, le 21 janvier 1997

CORRIGE

1. a. Vrai. Un tel élément n'appartient forcément à aucun idéal maximal de A et est donc inversible (Corollaire 1.6.8).

b. Faux. Soit $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la réduction modulo 2. Il n'y a pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Q} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. f n'induit donc pas de morphisme de $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

c. Faux. Le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est libre donc sans torsion.

d. Vrai. Le seul idéal maximal de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ est l'idéal engendré par 3 (Exercice 106).

2. a. a_i appartient à l'anneau A_{i+1} car $a_i = a_{i+1}^2$. Par conséquent, A_i étant le plus petit sous-anneau de $\mathbb{R}$ contenant a_i est contenu dans A_{i+1}.

b. $1 \in A$ car $1 \in A_0 = \mathbb{Z}$. Soient $x, y \in A$. Il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que x appartienne à A_i et y appartienne à A_j. On peut supposer $i \geq j$. D'après le a, $A_j \subseteq A_i$, donc x et y appartiennent tous les deux à A_i. Comme A_i est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, $x+y$, xy et $-x$ appartiennent à A_i. Or A_i est contenu dans A, donc $x+y$, xy et $-x$ appartiennent à A.

c. Comme A_i est contenu dans A_{i+1} et comme a_{i+1} divise a_i dans A_{i+1},

$$I_i = a_i A_i \subseteq a_i A_{i+1} \subseteq a_{i+1} A_{i+1} = I_{i+1}.$$

d. On a $0 \in I_0 \subseteq I$. Soient $x, y \in I$ et soit $a \in A$. Il existe $i, j, k \in \mathbb{N}$ tels que $x \in I_i$, $y \in I_j$ et $a \in A_k$. Soit $l = \max\{i, j, k\}$. D'après le a et le c, x et y appartiennent à I_l et a appartient à A_l. Comme I_l est un idéal de A_l, $x+y$ et ax appartiennent à I_l. Or I_l est contenu dans I, d'où $x+y$ et ax appartiennent à I.

e. Soit $f\colon \mathbb{Z}[X] \to A_i$ le morphisme d'anneaux tel que $f(X) = a_i$. Comme $X^{2^i} - 2$ appartient au noyau de f, le morphisme f induit un morphisme g du quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^{2^i} - 2)$ dans A_i. D'après la division euclidienne, le système $\{1, X, \ldots, X^{2^i - 1}\}$ est générateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X]/(X^{2^i} - 2)$ (Corollaire 1.4.2). Par conséquent, $\mathbb{Z}[X]/(X^{2^i} - 2)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Il est clair que l'image de f est égale au sous-anneau A_i de $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'image de g

est, elle aussi, égale à A_i. Comme g est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules et comme $\mathbb{Z}[X]/(X^{2^i}-2)$ est de type fini, A_i est alors un $\mathbb{Z}$-module de type fini (Exercice 165).

f. D'après le e, A_i est de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module. Or $\mathbb{Z}$ est noetherien, donc tout sous-$\mathbb{Z}$-module de A_i est de type fini (Proposition 2.2.10). Supposons que 2 est inversible dans A_i. Le sous-anneau A_i de $\mathbb{R}$ contient alors le sous-anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Ce dernier sous-anneau est isomorphe à la localisation $\mathbb{Z}_2$ de $\mathbb{Z}$ par 2. Mais $\mathbb{Z}_2$ n'est pas de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module (Exercice 183), donc $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ n'est pas non plus de type fini en tant que $\mathbb{Z}$-module. Contradiction avec ce qui précède.

g. L'idéal I_i est engendré par a_i. L'idéal $I_i^{2^i}$ est alors engendré par $a_i^{2^i}=2$.

h. Supposons que $I_i = A_i$. On a alors que $I_i^{2^i} = A_i$. Mais, d'après le g, $I_i^{2^i} = 2A_i$. D'où, $2A_i = A_i$, i.e., 2 est inversible dans A_i. Contradiction avec le f.

i. Supposons que $I = A$. On a alors que $1 \in I$. Comme I est la réunion de tous les I_i, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que 1 appartienne à I_i. Contradiction avec le h.

j. L'inclusion $I \cdot I \subseteq I$ est évidente. Pour montrer l'inclusion $I \cdot I \supseteq I$, il suffit de montrer que $I \cdot I \supseteq I_i$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. Mais I_i est l'idéal de A_i engendré par a_i. Donc il suffit de montrer que a_i appartient à $I \cdot I$, ce qui est évident car

$$a_i = a_{i+1} \cdot a_{i+1} \in I_{i+1} \cdot I_{i+1} \subseteq I \cdot I.$$

k. Supposons que I est de type fini. D'après le j, $I \cdot I = I$. Le lemme de Nakayama (première version) appliqué au A-module I implique qu'il existe alors $x \in I$ tel que $(1 + x) \cdot I = 0$. Comme $I \neq 0$ et A est intègre, on a que $1 + x = 0$, i.e., $-1 = x \in I$ et donc $I = A$. Contradiction avec le i.

3. a. Soit $p \in P$. Alors, $i \circ f(p) = f(p) \oplus_P 0 = 0 \oplus_P g(p) = j \circ g(p)$ car $f(p) \oplus 0 - 0 \oplus g(p) = h(p) \in \mathrm{im}(h)$ et donc $f(p) \oplus_P 0 = 0 \oplus_P g(p)$.

b. Soit Q un A-module et soient $k\colon M \to Q$ et $l\colon N \to Q$ des morphismes tels que $k \circ f = l \circ g$. Soit $v\colon M \oplus N \to Q$ le morphisme défini par $v(m \oplus n) = k(m) + l(n)$ où $m \oplus n \in M \oplus N$. On a que

$$\begin{aligned} v(h(p)) &= v(f(p) \oplus -g(p)) = \\ &= k(f(p)) + l(-g(p)) = \\ &= k \circ f(p) - l \circ g(p) = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $p \in P$, si bien que v induit un morphisme $u\colon M \oplus_P N \to Q$ tel que $u(m \oplus_P n) = v(m \oplus n)$ quel que soit $m \oplus_P n \in M \oplus_P N$. En particulier, $u \circ i(m) = u(m \oplus_P 0) = v(m \oplus 0) = k(m)$ quel que soit $m \in M$. De même, $u \circ j(n) = l(n)$ quel que soit $n \in N$. Ce la montre l'existence du morphisme u.

Pour en montrer l'unicité, supposons que u' est aussi un morphisme de $M \oplus_P N$ dans Q satisfaisant $u' \circ i = k$ et $u' \circ j = l$. On a alors,

$$\begin{aligned} u'(m \oplus_P n) &= u'(i(m) + j(n)) = \\ &= u'(i(m)) + u'(j(n)) = \\ &= k(m) + l(n) = \\ &= u(i(m)) + u(j(n)) = \\ &= u(i(m) + j(n)) = \\ &= u(m \oplus_P n) \end{aligned}$$

quel que soit $m \oplus_P n \in M \oplus_P N$. D'où l'unicité de u.

c. On montre que le A-module $M + N$, muni des inclusions $i\colon M \to M + N$ et $j\colon N \to M + N$ satisfait la même propriété universelle que $M \oplus_P N$. Tout d'abord, on a bien $i \circ f = j \circ g$ car tous les morphismes en question sont des inclusions.

Soit Q un A-module et soient $k\colon M \to Q$ et $l\colon N \to Q$ des morphismes tels que $k \circ f = l \circ g$. L'unicité du morphisme $u\colon M + N \to Q$ tel que $u \circ i = k$ et $u \circ j = l$ est clair car i et j sont les inclusions de M et N, respectivement, dans $M + N$, et $M + N$ est engendré par $M \cup N$ (Exercice 176a).

Ensuite, montrons l'existence du morphisme u. Soit $x \in M + N$. Il existe $m \in M$ et $n \in N$ tels que $m + n = x$. On définit $u(x)$ par $k(m) + l(n)$. Cette définition ne dépend pas de m et n. En effet, soit $m' \in M$ et $n' \in N$ tels que $m' + n' = x$. Alors, $m + n = m' + n'$ et donc $m - m' = n' - n \in M \cap N = P$. Comme f et g sont les inclusions de $M \cap N$ dans M et N, respectivement, la condition sur k et l équivaut à la condition $k_{|M \cap N} = l_{|M \cap N}$. Par conséquent, $k(m - m') = l(n' - n)$, i.e., $k(m) + l(n) = k(m') + l(n')$. Cela montre que la définition de $u(x)$ ne dépend pas de m et n. En particulier, u est un morphisme de A-modules et on a $u \circ i = k$ et $u \circ j = l$, ce qui montre l'existence de u.

d. Montrons que $M \oplus_P N$, muni des morphismes $i\colon M \to M \oplus_P N$ et $j\colon N \to M \oplus_P N$, satisfait la propriété universelle de $M \oplus_{P'} N$. Soit $\pi\colon P \to P'$ le passage au quotient. Tout d'abord, on a bien $i \circ f' = j \circ g'$, car $i \circ f' \circ \pi = i \circ f = j \circ g = j \circ g' \circ \pi$ et π est surjectif.

Puis, soit Q un A-module et soient $k\colon M \to Q$ et $l\colon N \to Q$ des morphismes tels que $k \circ f' = l \circ g'$. En particulier, $k \circ f = k \circ f' \circ \pi = l \circ g' \circ \pi = l \circ g$. D'après le b, il existe un unique morphisme $u\colon M \oplus_P N \to Q$ tel que $u \circ i = k$ et $u \circ j = l$. Cela montre que $M \oplus_P N$ satisfait la propriété universelle de la somme amalgamée de M et N sur P', et donc que $M \oplus_P N$ est isomorphe à $M \oplus_{P'} N$.

e. Comme M et N sont de dimension finie, la somme directe $M \oplus N$ est de dimension finie. La somme amalgamée $M \oplus_P N$, étant un quotient de $M \oplus N$, elle est bien de dimension finie. En ce qui concerne P, le morphisme h de P dans $M \oplus N$ est injectif car $\ker(h) = \ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$. Par conséquent, P, étant isomorphe à un sous-espace vectoriel de $M \oplus N$, il est aussi de dimension finie.

f. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{h} M \oplus N \longrightarrow M \oplus_P N \longrightarrow 0\,.$$

D'après le Théorème du rang (ou bien Exercice 205),

$$\begin{aligned}\dim(M \oplus_P N) &= \dim(M \oplus N) - \dim(P) = \\ &= \dim(M) + \dim(N) - \dim(P).\end{aligned}$$