<u>Théorème</u> Soit $f : C_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors il existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$. De plus, la convergence est uniforme sur tout sous-ensemble compact de $C_{r,R}(z_0)$, et on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

où $r < \rho R$.

<u>Démo</u> D'après le Th précédent, $f = f_1 + f_2$ où f_2 est la partie analytique de f et f_1 la partie principale de f.
Comme f_2 est holomorphe sur $D(z_0, R)$, il existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, avec

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

où la convergence est uniforme sur tout compact de $D(z_0, R)$.
Comme f_1 est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$ la fonction $f_1 \circ g : D(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, où $g(z) = \frac{1}{z} + z_0$, est holomorphe.
Remarquons que $g(D(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$
Or, $f_1(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$.
Du coup, $(f_1 \circ g)(z) \to 0$ lorsque $z \to 0$

la fonction $f_1 \circ g$ se prolonge donc par continuité à $D(0, \frac{1}{r})$ en définissant $(f_1 \circ g)(0) = 0$.
D'après Goursat, $f_1 \circ g$ est holomorphe sur $D(0, \frac{1}{r})$. Du coup, il existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, tels que

$$f_1 \circ g(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^{-n}$$

sur $D(0, \frac{1}{r})$, où la convergence est uniforme sur chaque compact de $D(0, \frac{1}{r})$.
En composant $f_1 \circ g$ avec g^{-1}, on obtient

$$f_1(z) = (f_1 \circ g)(g^{-1}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

car $g^{-1}(z) = \frac{1}{z - z_0}$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$ avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r)$. Au final on obtient bien

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour $z \in C_{r,R}(z_0)$, avec convergence uniforme sur tout compact.
Comme $\partial D(z_0, \rho)$ est compact

$$\int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\partial D(z_0,\rho)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{(\xi - z_0)^m}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\partial D(z_0,\rho)} (\xi - z_0)^{m-n-1} d\xi = a_n 2\pi i.$$

▯

Déf (avec les notations ci-dessus)
L'écriture de $f(z)$ sous forme
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
est le développement de f en série de Laurent de la fonction f.

§5.2. Le Théorème des résidus

Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $D \subseteq B$ discret, i.e., le sous-ensemble D n'a pas de point d'accumulation dans B.
Soit $f : B \setminus D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.
C'est ce qu'on appelle une fonction méromorphe sur B. On pense aux éléments de D comme les endroits où f possède un "pôle", ou une "singularité".

Déf Soit $z_0 \in D$. Soit $R > 0$ t.q. $D(z_0, R) \subseteq B$ et $D(z_0,R) \cap D = \{z_0\}$.
f étant holomorphe sur la couronne $D_{0,R}(z_0)$, f se développe en série de Laurent d'après le Th précédent :
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
sur $C_{0,R}(z_0)$, où les $a_n \in \mathbb{C}$ sont uniquement déterminés par f.

le <u>résidu</u> de f en z_0 est le nombre complexe a_{-1}.
On le note $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

<u>Théorème des résidus</u> (avec les notations précédentes)

Soit $\Gamma \subseteq B$ un cycle avec $\Gamma \cap D = \emptyset$ et $\mathrm{Int}(\Gamma) \subseteq B$. Alors

$$\int_\Gamma f(\xi)\,d\xi = 2\pi i \sum_{z \in D \cap \mathrm{Int}(\Gamma)} \mathrm{Ind}(\Gamma, z)\,\mathrm{Res}(f, z)$$

<u>Démo</u> Comme D est <u>discret</u> et $\overline{\mathrm{Int}(\Gamma)}$ est compact, $D \cap \overline{\mathrm{Int}(\Gamma)}$ est fini.
En particulier $D \cap \mathrm{Int}(\Gamma) = \{z_1, \dots, z_n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit $h_i : \mathbb{C} \setminus \{z_i\} \to \mathbb{C}$ la partie principale de f en z_i.
Soit $F : B \setminus D \to \mathbb{C}$ définie par

$$F = f - \sum_{i=1}^n h_i.$$

F se prolonge en une fonction continue sur B. D'après Goursat, F est holomorphe. D'après Cauchy,

$$0 = \int_\Gamma F = \int_\Gamma f - \sum_{i=1}^n h_i = \int_\Gamma f - \sum_{i=1}^n \int_\Gamma h_i.$$

Écrire $h_i = \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m (z - z_i)^m$ pour $z \neq z_i$. On a donc

$$\int_\Gamma h_i = \sum_{m=-\infty}^{-1} a_m \int_\Gamma \frac{1}{(z-z_i)^{-m}}\,dz$$

$$= a_{-1} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(\Gamma, z_i)$$

En effet, si on applique la formule de Cauchy pour la dérivée k-ième d'une fonction holomorphe à la fonction constante $g(z) \equiv 1$:

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z_i) \cdot g^{(k)}(z_i) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{(z - z_i)^{k+1}} \, dz$$

Du coup, pour $m = -\infty, \ldots, -1$,

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z - z_i)^{-m}} \, dz \underset{k=-m-1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{2\pi i}{(-m-1)!} \cdot \mathrm{Ind}(\Gamma, z_i) \cdot g^{(-m-1)}(z_i)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } -m-1 \neq 0 \\ 2\pi i \, \mathrm{Ind}(\Gamma, z_i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

☐

Application au calcul d'intégrales réels

Le Théorème des résidus permet de calculer des intégrales sans primitiver les fonctions.

I. Soit $R(x, y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ une fraction rationnelle en deux variables i.e., p et q sont des polynômes en x et y, tels que

$$q(\cos t, \sin t) \neq 0$$

pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

Alors, on peut calculer $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \, dt$ à l'aide du Th. des résidus.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right), z_i\right)$$

où les z_i sont les pôles de la fonction rationnelle $\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$ dans $D(0,1)$.

__Dém.__ On a $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + \frac{1}{e^{it}}\right)$ et $\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - \frac{1}{e^{it}}\right)$. Du coup,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it}-\frac{1}{e^{it}}\right)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it}-\frac{1}{e^{it}}\right)\right) \frac{\cdot\, i e^{it}}{i e^{it}}\, dt$$

$$= \frac{1}{i} \int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) dz$$

$$\underset{\text{résidus}}{\overset{\text{Th. des}}{=}} \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right), z_i\right)$$

$\square$

__Exemple__ : Soit $a > 1$. On a

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\left(a + \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^{-1} dz$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2az+1}\, dz$$

Or $z^2+2az+1 = \left(z-(-a+\sqrt{a^2-1})\right)\cdot$

$$\left(z-(-a-\sqrt{a^2-1})\right)$$

Du coup la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{z^2+2az+1}$ est

$$\frac{1}{z^2+2az+1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}}{z-(-a+\sqrt{a^2-1})} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}}{z-(-a-\sqrt{a^2-1})}$$

Le seul pôle dans $D(0,1)$ est $z_0 = -a+\sqrt{a^2-1}$. Le résidu de la fonction $\frac{1}{z^2+2az+1}$ en ce pôle est $\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$.

Du coup, d'après le Th des résidus

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$