Corollaire. Soit $f : B \to \mathbb{C}$, où $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert. Alors, f est holomorphe ssi f est analytique.

§ 3.3. Quelques applications de la formule intégrale de Cauchy

Théorème (les inégalités de Cauchy)
Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $\overline{D}(z_0, R) \subseteq B$. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe soit $\delta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \delta \leq R$. Alors, pour tout $z \in \overline{D}(z_0, R-\delta)$, on a

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{R}{\delta} \frac{k!}{\delta^k} \sup_{\xi : |\xi - z_0| = R} |f(\xi)|$$

En particulier,

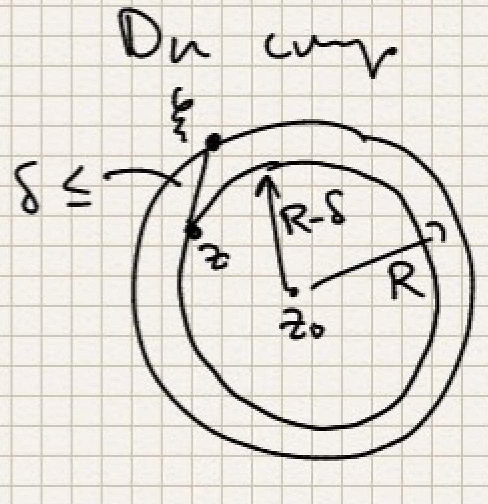
$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!}{R^k} \sup_{|\xi - z_0| = R} |f(\xi)|$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démo : On a vu que

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, d\xi$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Si $z \in D(z_0, R-\delta)$, alors $|z - z_0| \leq R - \delta$
Du coup $|\xi - z| \geq \delta$ pour tout ξ avec $|\xi - z_0| = R$. On a alors



$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \sup_{|\xi - z_0| = R} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \right| \cdot \ell(\partial D(z_0, R))$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \sup_{|\xi - z_0| = R} \left(\frac{|f(\xi)|}{\delta^{k+1}} \right) \cdot 2\pi R$$

$$= \frac{R}{\delta} \cdot \frac{k!}{\delta^k} \cdot \sup_{|\xi - z_0| = R} |f(\xi)| . \qquad \boxtimes$$

<u>Déf.</u> Une <u>fonction entière</u> est une fonction holomorphe $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

<u>Exemples</u> 1) toute fonction polynomiale en z est entière.

2) l'exponentielle $z \mapsto e^z$ est entière

3) $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont entières.

<u>Proposition</u> Soit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale de degré n, i.e,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

où $a_i \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Alors

a) Pour tout z avec $|z| \geq 1$, on a

$$|f(z)| \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) |z|^n .$$

b) Pour tout ε avec $0 < \varepsilon < 1$ il existe $\rho_\varepsilon \geq 1$ tel que pour tout z avec $|z| \geq \rho_\varepsilon$ on a

$$(1-\varepsilon)|a_n| \cdot |z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n||z|^n$$

<u>Démo</u> : a) Si $|z| \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| \\ &\leq |a_0| + |a_1| \cdot |z| + |a_2| \cdot |z|^2 + \cdots + |a_n| \cdot |z|^n \\ &\underset{|z|\geq 1}{\leq} |a_0| \cdot |z|^n + |a_1| \cdot |z|^n + \cdots + |a_n| \cdot |z|^n \\ &= (|a_0| + \cdots + |a_n|) |z|^n . \end{aligned}$$

b) Soit $\tilde{f}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$

$\tilde{f}$ est donc une fonction polynomiale de degré $\leq n-1$. D'après le a, on a donc

$$|\tilde{f}(z)| \leq (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|)\, |z|^{n-1}$$

pour $|z| \geq 1$

Soit $\rho_\varepsilon = \max\left\{1, \frac{1}{\varepsilon |a_n|} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right)\right\}$

Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq \rho_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z)| &\leq \left(\frac{1}{|z|} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot |z|^n \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho_\varepsilon} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) |z|^n \\ &\leq \varepsilon \cdot |a_n| \cdot |z|^n. \end{aligned}$$

Du coup,

$$(1-\varepsilon)|a_n||z|^n \leq |a_n||z|^n - |\tilde{f}(z)| \leq |f(z)|$$
$$\leq |a_n| \cdot |z|^n + |\tilde{f}(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_n| \cdot |z|^n. \quad \blacksquare$$

<u>Théorème</u> (Liouville)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Supposons qu'il existe $\rho, M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| \geq \rho : \quad |f(z)| \leq M \cdot |z|^n.$$

Alors f est une fonction polynomiale de degré $\leq n$. En particulier, si f est une fonction entière bornée, alors f est constante.

<u>Démo</u>. Comme f est entière,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

avec $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

D'après l'inégalité de Cauchy, (avec $\delta = R$)

$$|a_k| = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{1}{k!} \frac{k!}{R^k} \sup_{|\xi|=R} |f(\xi)|$$

pour tout $R>0$ et pour tout $\in \mathbb{N}$.

Par hypothèse, $|f(\xi)| \leq M \cdot R^n$ pour $|\xi| = R \geq \rho$. Du coup, on a

$$|a_k| \leq \frac{1}{R^k} M \cdot R^n = \frac{M}{R^{k-n}}$$

si $R \geq \rho$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En particulier, pour $k>n$ on a

$$\forall R \geq \rho : \quad |a_k| \leq \frac{M}{R^{k-n}}$$

où $k-n>0$. Or $\frac{M}{R^{k-n}} \to 0 \ (R \to \infty)$

Par conséquent, $|a_k| = 0 \quad \forall k>n$.

i.e. $a_k = 0 \quad \forall k>n$ et

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

est une fonction polynomiale de degré $\leq n$ $\square$

<u>Théorème fondamental de l'algèbre</u>

Toute fonction polynomiale non constante possède une racine dans $\mathbb{C}$

<u>Démo</u> Par l'absurde, supposons que $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ est une fonction polynomiale non constante

sans racine dans $\mathbb{C}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. Comme $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

est bien définie et entière. On montre qu'elle est bornée. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition ci-dessus, il existe $\rho_\varepsilon \geq 1$ tel que

$\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq \rho_\varepsilon$: $|f(z)| \geq (1-\varepsilon)|a_n||z|^n$

$\geq (1-\varepsilon)|a_n| \cdot \rho_\varepsilon^n =: M$.

On a $M > 0$ et $|f(z)| \geq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq \rho_\varepsilon$. Du coup, pour tout $|z| \geq \rho_\varepsilon$ on a

$$|g(z)| \leq \frac{1}{M}$$

Comme l'application $|g|$ est continue sur $\overline{D(0, \rho_\varepsilon)}$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tq. $|g(z)| \leq K$ pour tout $z \in \overline{D}(0, \rho_\varepsilon)$. Du coup,

$\forall z \in \mathbb{C}$: $|g(z)| \leq \max\{K, \frac{1}{M}\}$

c-à-d, g est fonction entière bornée. D'après Liouville, g est constante, et f aussi. Contradiction

☒

Corollaire. Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ une fonction polynomiale de degré n. Alors, f possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$ lorsqu'on les comptes avec multiplicités, et on a

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

où $z_1, \dots, z_n$ sont les racines de f.

IV Indice d'un cycle et le Théorème de Cauchy

§ 4.1. Indice d'un cycle.

Soit Γ un cycle ou chaîne fermée dans $\mathbb{C}$. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$. Ω est un ouvert dans $\mathbb{C}$

Déf Soit $z \in \Omega$. L'indice de Γ en z est

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z} \, d\xi \in \mathbb{C}.$$

Ex. Soit $\Gamma = [\gamma]$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi} \, d\xi = 1$$

Du coup, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ind}(n\Gamma, 0) = n \cdot \mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = n$$

Notons encore que

$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \to 0$$

lorsque $|z| \to \infty$

En fait, on verra que $\mathrm{Ind}(\Gamma, z)$ est constante sur les composantes connexes de Ω

On aura donc

$$\mathrm{Ind}(n\Gamma, z) = \begin{cases} n & \text{si } |z| < 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

<u>Proposition</u> a) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cycles dans $\mathbb{C}$. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\mathrm{supp}(\Gamma_1) \cup \mathrm{supp}(\Gamma_2))$. Alors pour tout $z \in \Omega$, on a

$$\mathrm{Ind}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2, z) = \mathrm{Ind}(\Gamma_1, z) + \mathrm{Ind}(\Gamma_2, z)$$

b) Soit Γ un cycle dans $\mathbb{C}$ et soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$. Alors, pour tout $z \in \Omega$, on a

$$\mathrm{Ind}(-\Gamma, z) = -\mathrm{Ind}(\Gamma, z)$$ ▨

<u>Théorème</u> Soit Γ un cycle dans $\mathbb{C}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$. La fonction indice :

$$\mathrm{Ind}_\Gamma : \Omega \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \mathrm{Ind}(\Gamma, z)$$

est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante non bornée de Ω.

<u>Démo</u> : la fonction $\mathrm{Ind}_\Gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue. De plus, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$. Il suffira alors de montrer que la fonction Ind_Γ ne prend que des valeurs entières.

Soit $\Gamma = \{\gamma_1, .., \gamma_n\}$ où $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ arcs élémentaires.

On a $\gamma_1(1) = \gamma_2(0), \dots, \gamma_{n-1}(1) = \gamma_n(0)$ et $\gamma_n(1) = \gamma_1(0)$ car Γ est un cycle.

Soit $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\gamma_j'(s)}{\gamma_j(s) - z}\, ds$$

On a $h(0) = 0$ et $h(1) = \mathrm{Ind}(\Gamma, z)$

On montre que

$$e^{2\pi i h(1)} = 1$$

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z)$$

On montre que g est constante.

Remarquons que h est dérivable et que

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t) - z}.$$

Du coup, g est dérivable et montre que g est constante en montrant que $g' = 0$.

Or,

$$g'(t) = -2\pi i h'(t) e^{-2\pi i h(t)} \cdot \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} e^{-2\pi i h(t)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (\gamma_j(t) - z) \right) \gamma_k'(t)$$
$$= e^{-2\pi i h(t)} \left(-2\pi i h'(t) \cdot \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z) + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z) \right) \cdot \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - z} \right)$$
$$= e^{-2\pi i h(t)} \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z) \cdot \left(-2\pi i \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j'(t)}{\gamma_j(t) - z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k'(t)}{\gamma_k(t) - z} \right)$$
$$= 0.$$

La fonction g est donc constante et il existe alors $c \in \mathbb{C}$ tq

$$\prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(t) - z) = c \cdot e^{2\pi i h(t)} \quad (*)$$

pour tout $t \in [0,1]$. Comme $z \notin \operatorname{supp}(\Gamma)$, le premier membre est non nul pour tout $t \in [0,1]$. Du coup, $c \neq 0$. Le premier membre en $t = 0$ vaut

$$\prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(0) - z) = (\gamma_1(0) - z) \cdot \prod_{j=2}^{n} (\gamma_j(0) - z)$$
$$= (\gamma_n(1) - z) \cdot \prod_{j=2}^{n} (\gamma_{j-1}(1) - z) =$$
$$= (\gamma_n(1) - z) \prod_{j=1}^{n-1} (\gamma_j(1) - z) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (\gamma_j(1) - z)$$

le premier membre de $(*)$ évalué en $t = 1$! Du coup, on a aussi

$$e^{2\pi i h(0)} = e^{2\pi i h(1)}$$

Or $h(0) = 0$, donc $e^{2\pi i h(0)} = 1$.
Cela montre que $e^{2\pi i h(1)} = 1$. $\square$

<u>Exemple.</u> Soit $\gamma(t) = e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$
On a bien

$$\mathrm{Ind}(n\gamma, z) = \begin{cases} n & \text{si } |z| < 1 \\ 0 & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Déf.</u> Soit Γ un cycle dans $\mathbb{C}$ et soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$. L'<u>extérieur</u> de Γ est le sous-ensemble

$$\mathrm{Ext}(\Gamma) = \{ z \in \Omega \mid \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0 \}$$

de $\mathbb{C}$. L'<u>intérieur</u> de Γ est

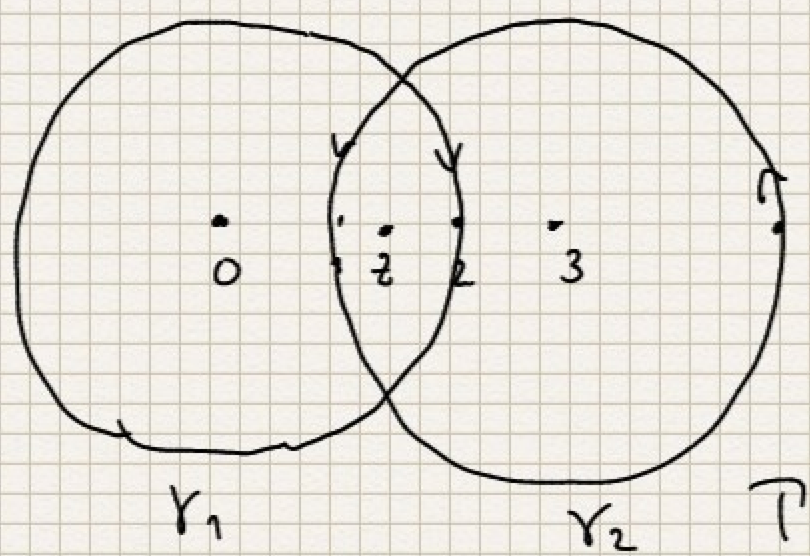
$$\mathrm{Int}(\Gamma) = \{ z \in \Omega \mid \mathrm{Ind}(\Gamma, z) \neq 0 \}$$

Notons que $\Omega = \mathrm{Ext}(\Gamma) \amalg \mathrm{Int}(\Gamma)$ et $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ contient la composante non bornée de Ω. On n'a pas forcément $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ égal à cette composante non bornée :

Exemple.

$\gamma_1(t) = 2e^{-it}$ et $\gamma_2(t) = 3 + 2e^{it}$

$t \in [0, 2\pi]$



$\Gamma_1 = \{\gamma_1\}$

$\Gamma_2 = \{\gamma_2\}$

sont des cycles.

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ est donc un cycle. Déterminons $Ext(\Gamma)$ la composante non bornée de

$\Omega = \mathbb{C} \setminus supp(\Gamma)$ est

$\Omega_{>>} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2 \text{ et } |z-3| > 2 \}$

les autres composantes connexes de Ω sont $\Omega_{<>}$, $\Omega_{<<}$ et $\Omega_{><}$.

Mq $\Omega_{<<} \subseteq Ext(\Gamma)$

En effet, soit $z \in \Omega_{<<}$ i.e, $|z| < 2$ et $|z-3| < 2$. Donc

$Ind(\Gamma_1, z) = -1$ et $Ind(\Gamma_2, z) = 1$

Donc

$$Ind(\Gamma, z) = -1 + 1 = 0$$

ce qui montre que $\Omega_{<<} \subseteq Ext(\Gamma)$.

On voit facilement que

$$Ind(\Gamma, z) \neq 0 \text{ si } z \in \Omega_{<>} \cup \Omega_{><}$$

Donc $Ext(\Gamma) = \Omega_{>>} \cup \Omega_{<<}$

et

$$\mathrm{Int}(\Gamma) = \Omega_{<>} \cup \Omega_{><} \, .$$

<u>Remarque</u> Comment déterminer $\mathrm{Ind}(\Gamma, z)$ en pratique ?
Choisir z_0 dans la composante non bornée de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\Gamma)$. de telle façon que le segment $[z_0, z]$ intersecte Γ transversalement en tout point de $[z_0, z] \cap \mathrm{supp}(\Gamma)$.
Cela veut dire que si

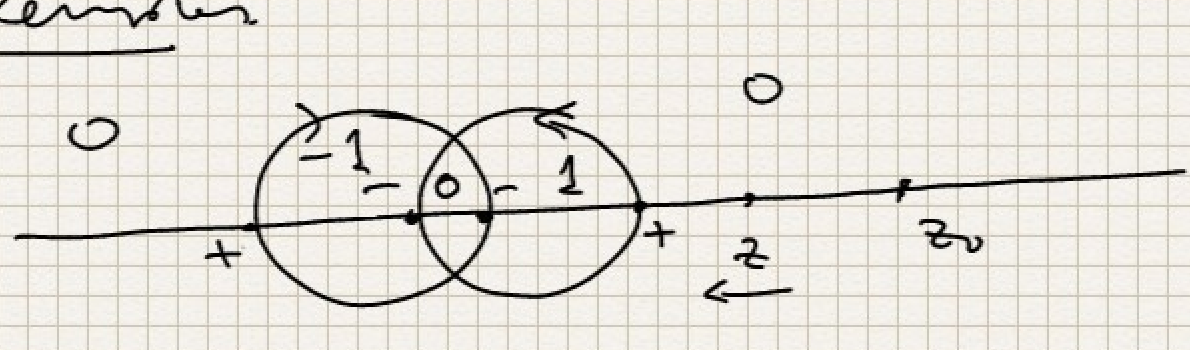
$$\gamma_i(t) \in [z_0, z]$$

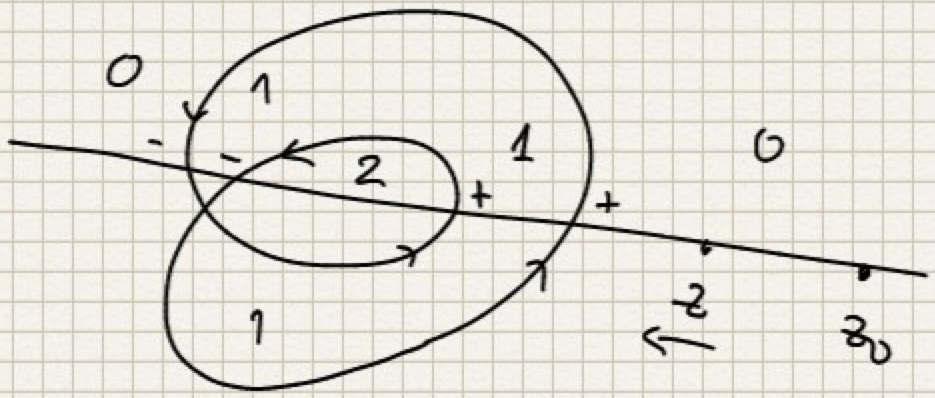
on veut que $t \neq 0, 1$ et que les vecteurs $\gamma_i'(t)$, $z - z_0$ constituent une base de $\mathbb{R}^2$. On dit que cette intersection est <u>positive</u> si cette base est une base directe de $\mathbb{R}^2$. Sinon, elle est <u>négative</u>.

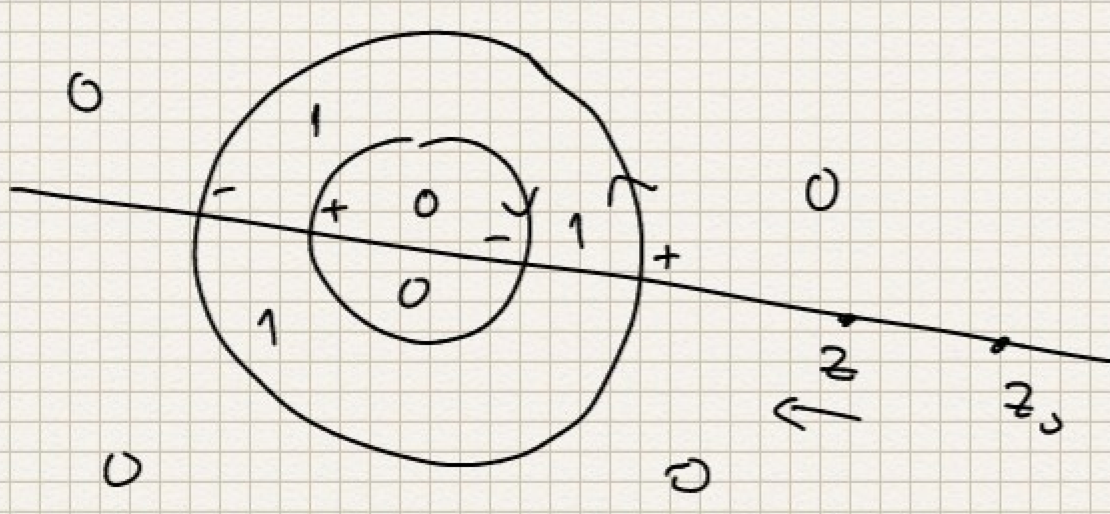
$$\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \#\text{ intersections positives} - \#\text{ intersections négatives}$$

où "intersections" veut dire les intersections de Γ avec $[z_0, z]$

<u>Exemples</u>







la démonstration de ce principe est laissée à titre d'exercice.

§4.2. Le Théorème de Cauchy.

Théorème (la formule intégrale de Cauchy) Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe. Soit Γ un cycle dans B avec

$$\boxed{\operatorname{Int}(\Gamma) \subseteq B}$$

Alors, pour tout $z \in B \setminus \operatorname{supp}(\Gamma)$ on a

$$\boxed{\operatorname{Ind}(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$

Démo: Pour $z \in B \setminus \operatorname{supp}(\Gamma)$, on a

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \cdot 2\pi i \operatorname{Ind}(\Gamma, z)$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

pour tout $z \in B \setminus \operatorname{supp}(\Gamma)$

La démonstration de cet énoncé-là se fera en 4 étapes.

a) Soit $g : B \times B \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(\xi, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases}$$

L'étape a consiste à montrer que g est continue.

b) Comme g est continue, on peut définir $h_0 : B \to \mathbb{C}$ par $h_0(z) = \int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi$

L'étape b consiste à montrer que h_0 est holomorphe sur B.

c) On peut prolonger h_0 à $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en définissant

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z) & \text{si } z \in B \\ \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi & \text{si } z \in \mathrm{Ext}(\Gamma) \end{cases}$$

L'étape c consiste à montrer que h est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

d) $h(z) \to 0$ lorsque $|z| \to +\infty$ et h est donc une fonction holomorphe entière bornée l'étape d consiste à en déduire que $h \equiv 0$. Du coup, pour $z \in B \setminus \text{supp}(T)$

$$0 = h(z) = \int_T g(\xi, z)\, d\xi$$

$$= \int_T \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Montrons donc les 4 étapes.

a) Soit $g : B \times B \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(\xi, z) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\[2ex] f'(z) & \text{si } \xi = z. \end{cases}$$

Montrons que g est continue comme fonctions de 4 variables réelles.

Il est clair que g est continue sur $(B \times B) \setminus \Delta$ où $\Delta = \{ (\xi, z) \in B \times B \mid \xi = z \}$ est la diagonale dans B. Comme $(B \times B) \setminus \Delta$ est un ouvert de $B \times B$, g est continue en tout point $(\xi, z) \notin \Delta$. On montre que g est continue en $(z_0, z_0) \in \Delta$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est holomorphe, f' est continue. Il existe donc $\delta > 0$ tq.

$$|z - z_0| < \delta \text{ et } z \in B \Rightarrow$$

$$|f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon.$$

Pour $\xi \neq z$, on a

$$|g(\xi, z) - g(z_0, z_0)| =$$

$$= \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\xi - z} \int_{\Gamma_{z,\xi}} (f'(w) - f'(z_0))\, dw \right|$$

où $\Gamma_{z,\xi}$ est une chaîne qui joint z à ξ dans B. Effectivement, la fonction

$$w \longmapsto f'(w) - f'(z_0)$$

possède la primitive

$$w \longmapsto f(w) - f'(z_0) w$$

Du coup

$$\int_{\Gamma_{z,\xi}} f'(w) - f'(z_0)\, dw = \left[f(w) - f'(z_0) w \right]_{w=z}^{w=\xi} =$$

$$= (f(\xi) - f'(z_0)\xi) - (f(z) - f'(z_0) z)$$

$$= \big(f(\xi) - f(z)\big) - (\xi - z)\, f'(z_0)$$

Du coup

$$\frac{1}{\xi - z} \int_{\Gamma_{z,\xi}} f'(w) - f'(z_0)\, dw =$$

$$= \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} - f'(z_0).$$

On a donc bien, pour $\xi \neq z$,

$$|g(\xi, z) - g(z_0, z_0)| =$$

$$\left| \frac{1}{\xi - z} \int_{\Gamma_{z,\xi}} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\, dw \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\xi - z|} \cdot \ell([z, \xi]) \cdot \sup_{w \in [z,\xi]} |f'(w) - f'(z_0)|$$

$$\leq \frac{1}{|\xi - z|}\, |\xi - z| \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

si $|\xi - z_0| < \delta$ et $|z - z_0| < \delta$

Si $\xi = z$ et $|z - z_0| < \delta$, on a

$$|g(\xi, z) - g(z_0, z_0)| = |f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$$

Dans tous les cas, on a

$$|g(\xi, z) - g(z_0, z_0)| < \varepsilon$$

lorsque $|\xi - z_0| < \delta$ et $|z - z_0| < \delta$.

Cela montre que $g : B \times B \to \mathbb{C}$ est continue.

b) Comme g est continue, on peut définir

$$h_0 : B \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$h_0(z) = \int_T g(\xi, z)\, d\xi$$

Comme g est continue sur $B \times B$, h_0 est continue. On montre que h_0 est holomorphe en montrant que

$$\int_{T_\Delta} h_0(z)\, dz = 0$$ pour tout triangle Δ contenu dans B.

i.e. $\mathrm{supp}(T_\Delta) \subseteq B$. Soit Δ un tel triangle. On a

$$\int_{T_\Delta} h_0(z)\, dz = \int_{T_\Delta} \left(\int_T g(\xi, z)\, d\xi \right) dz$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_T \left(\int_{T_\Delta} g(\xi, z)\, dz \right) d\xi$$

Or, la fonction $z \longmapsto g(\xi, z)$ est holomorphe sur $B \setminus \{\xi\}$ et continue sur B. D'après le Th de Goursat, $\int_{T_\Delta} g(\xi, z)\, dz = 0$

D'où $\int_{T_\Delta} h_0(z) dz = 0$.

Cela montre bien que $h_0 : B \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

c) Remarquons que pour $z \in B \cap \mathrm{Ext}(T)$,

$$h(z) = \int_T g(\xi, z)\, d\xi = \int_T \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \text{car } \mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$$

Or, la fonction

$$h_1 : \mathrm{Ext}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

est holomorphe sur $\mathrm{Ext}(\Gamma)$.

Comme $h_0|_{B \cap \mathrm{Ext}(\Gamma)} = h_1|_{B \cap \mathrm{Ext}(\Gamma)}$, h_0 et h_1 se recollent à une fonction $h : B \cup \mathrm{Ext}(\Gamma) = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h|_B = h_0 \text{ et } h|_{\mathrm{Ext}(\Gamma)} = h_1$$

Remarquons que $B \cup \mathrm{Ext}(\Gamma) = \mathbb{C}$ car $\mathrm{Int}(\Gamma) \subseteq B$ et $\mathrm{supp}(\Gamma) \subseteq B$

Comme h_0 et h_1 sont holomorphes, h est holomorphe.

d) Montrons que $h(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$.

Il existe $R > 0$ tq. $\mathrm{supp}(\Gamma) \subseteq D(0,R)$

Donc $\mathrm{Ext}(\Gamma) \supseteq \mathbb{C} \setminus D(0,R)$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| \geq 2R$, on a

$$|h(z)| = |h_1(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \right|$$
$$\leq \ell(\Gamma) \cdot \sup_{\xi \in \mathrm{supp}(\Gamma)} \left| \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right|$$

$$\leq \ell(\Gamma) \cdot \sup_{\xi \in \operatorname{supp}(\Gamma)} |f(\xi)| \cdot \sup_{\xi \in \operatorname{supp}(\Gamma)} \frac{1}{|\xi - z|}$$

$$\leq \ell(\Gamma) \cdot \sup_{\xi \in \operatorname{supp}(\Gamma)} |f(\xi)| \cdot \frac{2}{|z|}$$

car $\dfrac{1}{|\xi - z|} \leq \dfrac{1}{|z| - |\xi|} \leq \dfrac{1}{|z| - R} \leq \dfrac{1}{|z| - \frac{|z|}{2}} = \dfrac{2}{|z|}$.

Or, $\ell(\Gamma) \sup_{\xi} |f(\xi)| \frac{2}{|z|} \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$. D'où $h(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$. Par Liouville, h est constante. Comme $h \to 0$ ($|z| \to \infty$) $h \equiv 0$. ☐

<u>Corollaire</u>, (avec les mêmes notations)
Pour tout $z \in B \setminus \operatorname{supp}(\Gamma)$ on a

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

<u>Corollaire</u> (le Théorème de Cauchy)
Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe, Γ cycle dans B avec $\operatorname{Int}(\Gamma) \subseteq B$. Alors

$$\int_\Gamma f(z) dz = 0$$

<u>Démo</u>. Soit $g : B \to \mathbb{C}$ définie par

$g(z) = f(z)(z - a)$ où $a \in B \setminus \operatorname{supp}(\Gamma)$ est fixé

g est holomorphe sur B. D'après la formule de Cauchy,

$$\mathrm{Ind}(\Gamma,a)\,g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\xi)}{\xi-a}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)(\xi-a)}{(\xi-a)}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)\,d\xi$$

Or, $g(a) = f(a)(a-a) = 0$. $\boxtimes$

V Théorème des résidus

§5.1. Séries de Laurent

Soient $r, R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $0 \leq r < R \leq +\infty$.
On définit la couronne de rayons r et R de centre z_0 par

$$C_{r,R}(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

$C_{0,R}(z_0) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ est un disque épointé

Théorème (caractérisation de fonctions holomorphes sur une couronne)
Soit $f : C_{r,R}(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.
Alors, il existe des fonctions holomorphes

$$f_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f_2 : D(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$$

telles que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$
pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$ et
$f_1(z) \longrightarrow 0$ lorsque $|z| \longrightarrow \infty$
De plus, les fonctions f_1 et f_2 sont uniquement déterminées par ces conditions.

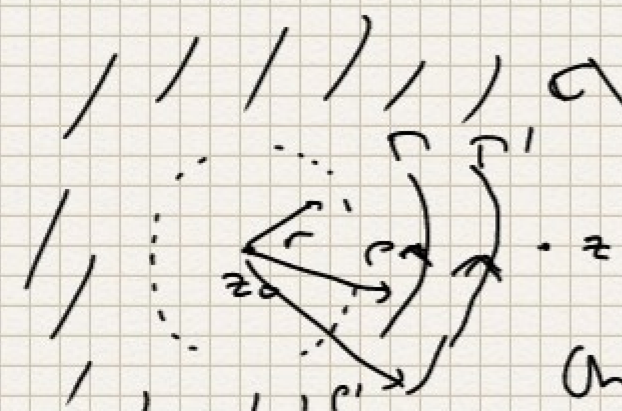
Démo Définissons f_1 et f_2 par

$$f_1(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \quad \text{où } r < \rho < |z| \text{ et } \rho < R$$

et $$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,\rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \quad \text{où } |z| < \rho < R \text{ et } r < \rho$$

Montrons que f_1 et f_2 sont bien définies, i.e, que les seconds membres ne dépendent pas de ρ. Faisons-le pour f_1. Soient ρ et ρ' tels que

$$r < \rho < |z| \quad \text{et} \quad r < \rho' < |z| \quad \text{et} \quad \rho, \rho' < R$$



$\mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r) =$ domaine de f_2

$\Gamma = \partial D(z_0, \rho)$

$\Gamma' = \partial D(z_0, \rho')$

On a $\operatorname{Ind}(\Gamma - \Gamma', z) = 0$

De plus $\operatorname{Int}(\Gamma - \Gamma') = D(z_0, \rho') \setminus \overline{D}(z_0, \rho) = C_{\rho, \rho'}(z_0) \subseteq C_{r,R}(z_0) = \operatorname{dom}(f)$. On peut donc appliquer la formule de Cauchy à f sur le cycle $\Gamma - \Gamma'$ et on obtient

$$0 = \operatorname{Ind}(\Gamma - \Gamma', z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

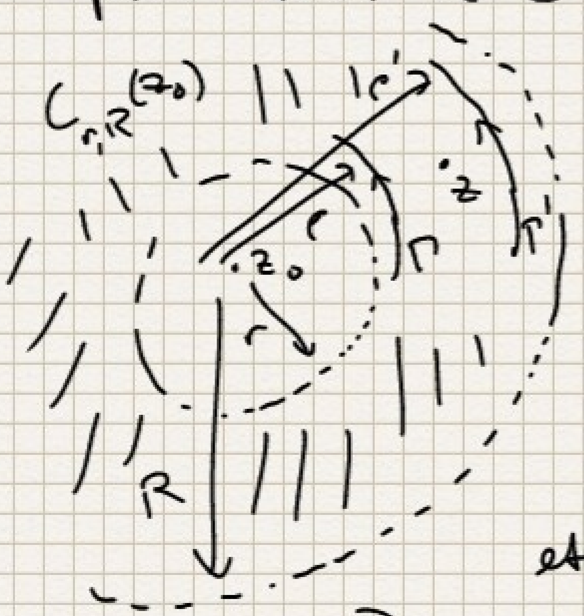
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

Du coup,

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

Le second membre dans la définition de $f_1(z)$ ne dépend pas du choix de ρ.
De même pour f_2.
Il est clair que f_1 et f_2 sont holomorphes.

Montrons que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$
pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$.



Choisir ρ et ρ' tels que

$$r < \rho < |z| < \rho' < R$$

Soit $\Gamma = \partial D(z_0, \rho)$
et $\Gamma' = \partial D(z_0, \rho')$.

$\mathrm{Ind}(\Gamma', z) = 1$
et $\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = 0$

Du coup, $\mathrm{Ind}(\Gamma' - \Gamma, z) = 1$

Plus généralement, $\mathrm{Int}(\Gamma' - \Gamma) =$
$= D(z_0, \rho') - \overline{D}(z_0, \rho) \subseteq C_{r,R}(z_0)$.

On peut donc appliquer la formule de Cauchy à f sur $\Gamma' - \Gamma$ en z :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma' - \Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$= f_2(z) + f_1(z).$$

On montre que $f_1(z) \to 0$ $|z| \to \infty$ de la même manière que dans la démo de la formule de Cauchy.
Cela démontre l'existence des fonctions f_1 et f_2. Montrons l'unicité et supposons que $g_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{D}(z_0, r) \to \mathbb{C}$
$g_2 : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ sont holomorphes

que $g_1(z) \to 0 \quad (|z| \to \infty)$
et que $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$. On montre que $g_1 = f_1$ et $g_2 = f_2$. Or, on a

$$f_1(z) + f_2(z) = f(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$. Du coup,

$$f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z)$$

pour tout $z \in C_{r,R}(z_0)$. Soit

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z) & \text{si } |z| > r \\ g_2(z) - f_2(z) & \text{si } |z| < R \end{cases}$$

h est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Comme $g_1 \to 0$ et $f_1 \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$, $h \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$.
Grâce à Liouville $h(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
Du coup, $f_1 = g_1$ et $f_2 = g_2$. $\square$

Déf f_1 est la partie <u>principale</u> de f et f_2 est la partie <u>analytique</u> de f.