Rappelons la formule de Cauchy pour les disques :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad z \in D = D(z_0, R)$$

où $f : B \to \mathbb{C}$ est holomorphe, $z_0 \in B$ et $\overline{D} = \overline{D}(z_0, R) \subseteq B$

Cette formule est remarquable car elle exprime la valeur de f en un point à l'intérieur du disque D en fonction de ses valeurs sur le bord ∂D du disque D. Si on connait la fonction f sur ∂D, on connaît f sur D tout entier !

Comme ce résultat en est un de première importance, rappelons brièvement quelle suite d'arguments a permis de l'établir :

Etant donné $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe on introduit

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases}$$

g est continue et holomorphe en dehors de z. On a démontré que pour une telle fonction toutes les intégrales

$$\int_{\partial T} g(\xi)\, d\xi = 0$$

où T est un triangle fermé plein entièrement contenu dans B. D'après un autre résultat $g|_{D(z_0, R+\varepsilon)}$

($D(z_0, R+\varepsilon) \subseteq B$ et est convexe),
possède une primitive holomorphe F.
Encore un autre résultat dit qu'alors

$$\int_\Gamma g(\xi)\, d\xi = 0$$

pour toute chaîne fermée dans $D(z_0, R+\varepsilon)$
On l'applique à Γ "=" $\partial D(z_0, R)$:

$$0 = \int_{\partial D} g(\xi)\, d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \int_{\partial D} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - 2\pi i\, f(z).$$

Corollaire. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe où $B \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Alors, f est k fois dérivable (au sens complexe) pour tout entier naturel k sur B et

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi$$

où $D = D(z_0, R)$ avec $\overline{D} \subseteq B$ et $z \in D$.

Avant de faire la démonstration, rappelons un Théorème de l'analyse réelle :

Théorème. Soit
$$f : [a,b] \times B \longrightarrow \mathbb{R}$$
où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert.
Supposons que f est intégrable (au sens de Riemann) par rapport à t, c-à-d la fonction $g : B \to \mathbb{R}$ déf. par
$$g(x,y) = \int_a^b f(t,x,y)\,dt$$
est bien définie. Alors,

(i) si f est continue, g est continue :
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \int_a^b f(t,x,y)\,dt =$$
$$= \int_a^b \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(t,x,y)\,dt$$

(ii) Si f est continûment partiellement dérivable par rapport à x et y sur $[a,b] \times B$ entier, c-à-d les dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times B \to \mathbb{R}$$
existent et sont continues sur $[a,b] \times B$, alors g est continûment partiellement dérivable sur B et
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\,dt$$
et
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dt. \qquad \square$$

On en déduit la proposition suivante.

Prop. Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et Γ une chaîne contenue dans $\mathbb{C}$. Soit $f : \mathrm{supp}(\Gamma) \times B \to \mathbb{C}$. Supposons que la fonction

$$\xi \longmapsto f(\xi, z)$$

est intégrable sur Γ pour tout $z \in B$, c-à-d, supposons que la fonction $F : B \to \mathbb{C}$ définie par

$$F(z) = \int_\Gamma f(\xi, z)\, d\xi$$

est bien définie. Alors

(i) Si f est continue, F est continue

(ii) Si f est continûment partiellement dérivable par rapport à x et y (parties réelle et imaginaire de z) alors il en est de même pour F

(iii) Si f est holomorphe en z, c-à-d, pour tout $\xi \in \mathrm{supp}(\Gamma)$ la fonction $z \longmapsto f(\xi, z)$ est holomorphe sur B, alors F est holomorphe sur B.

Démo. On peut supposer que Γ est une chaîne élémentaire $[\gamma]$ où $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un arc élémentaire. Remarquons que

$$F(z) = \int_a^b f(\gamma(t), z)\, \gamma'(t)\, dt$$

Pour démontrer le (i) et le (ii) on applique le Théorème précédent aux fonctions

$$(t, x, y) \longmapsto \operatorname{Re}\left(f(\gamma(t), x+iy)\cdot\gamma'(t)\right)$$

et

$$(t, x, y) \longmapsto \operatorname{Im}\left(f(\gamma(t), x+iy)\cdot\gamma'(t)\right)$$

définies sur $[a,b] \times B \subseteq \mathbb{R}^3$

Du coup on aura le (i) et le (ii)

Observons que si f continûment partiellement dérivable, on aura alors que

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial z}\, d\xi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\xi$$

Du coup, si f est holomorphe en z, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ et aussi $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, i.e. F est holomorphe. C'est le (iii) ⊠

Remarquons que sans condition (iii) on a du moins que

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial z}\, d\xi.$$

Montrons maintenant le corollaire ci-dessus de la formule de Cauchy :

<u>Démo</u> Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe, $z_0 \in B$, $\overline{D(z_0, R)} \subseteq B$. Montrons que f' est holomorphe en $z \in D$. Or, d'après la formule de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Remarquons que, pour ξ fixé dans ∂D,

$$z \longmapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}, \quad B \longrightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe sur D. D'après la proposition précédente la fonction

$$z \longmapsto \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

est holomorphe sur D, et de plus,

$$\frac{\partial}{\partial z} 2\pi i f(z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= \int_{\partial D} f(\xi) \cdot \frac{-1}{(\xi - z)^2} \cdot (-1)\, d\xi$$

$$= \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, dz.$$

D'où
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi . \quad (*)$$
Cela montre le corollaire pour $k = 1$.
Or, la fonction
$$z \longmapsto \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \qquad B \longrightarrow \mathbb{C}$$
est holomorphe pour tout $\xi \in \partial D$.
Du coup, le second membre de $(*)$ est holomorphe en z. Par conséquent, f' est holomorphe en z, et d'après $(*)$
$$f^{(2)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\xi) \cdot \frac{-2}{(\xi - z)^3} \cdot (-1) \, d\xi =$$
$$= \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \, d\xi .$$
C'est la formule du corollaire pour $k = 2$.
Ainsi de suite ; on conclut par récurrence. □

<u>Théorème</u> Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe où $B \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Posons
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$
où $z_0 \in B$ fixe. Soit $R > 0$ tq. $\overline{D(z_0, R)} \subseteq B$.

Alors la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
a un rayon de convergence $\geq R$ et de plus, $\forall z \in D(z_0, R)$ on a
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$
En particulier, f est analytique en z_0.

Avant de démontrer ce résultat, rappelons encore quelques faits de l'analyse réelle.

Théorème. Soit Γ une chaîne dans $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions complexes continues sur $\mathrm{supp}(\Gamma)$.

(i) Si (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : \mathrm{supp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$, alors
$$\int_\Gamma f \, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n \, dz$$

(ii) Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathrm{supp}(\Gamma)$ alors
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$
a la propriété que
$$\int_\Gamma f \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Gamma f_n \, dz. \qquad \square$$

Montrons maintenant le Théorème ci-dessus :

<u>Démo</u>. Soit $z \in D$. D'après la formule de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi .$$

Pour $\xi \in \partial D$, on a

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = f(\xi) \cdot \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} =$$

$$= \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} .$$

Comme $z \in D(z_0, R)$,

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < \frac{R}{R} = 1$$

Du coup, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

converge uniformément en ξ pour tout z fixé dans D. Il en est de même pour la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n .$$

D'après le Théorème précédent, (et Cauchy)

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{\partial D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \; f^{(n)}(z_0) \; \frac{2\pi i}{n!}$$

D'après le Corollaire précédent

On obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \cdot a_n . \qquad \square$$