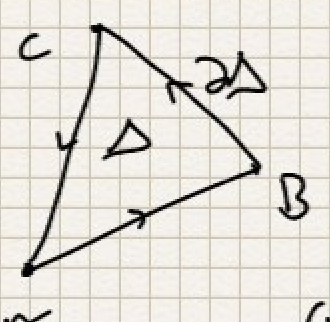
III Fonctions holomorphes

§1 Le Théorème de Cauchy

Un *triangle* dans $\mathbb{C}$ est sous-ensemble de $\mathbb{C}$ qui est l'enveloppe convexe de 3 points non colinéaires. Si Δ est un triangle, on considère son bord comme une chaîne fermée (ou cycle) en la prenant avec l'orientation usuelle. Plus précisément, soit Δ le triangle ABC. On note



AB la chaîne élémentaire

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto (1-t)A + tB$$

On suppose que la base réelle $\{B-A, C-A\}$ de $\mathbb{C}$ est directe. Alors le bord $\partial\Delta$ considéré comme chaîne est la chaîne $\{AB, BC, CA\}$

On a démontré ci-dessus que si $f : B \to \mathbb{C}$ continue possède une primitive (holomorphe) alors

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subseteq B$. Remarquons qu'il est important que tout Δ soit contenu dans B, et non seulement son bord $\partial\Delta$. En effet,

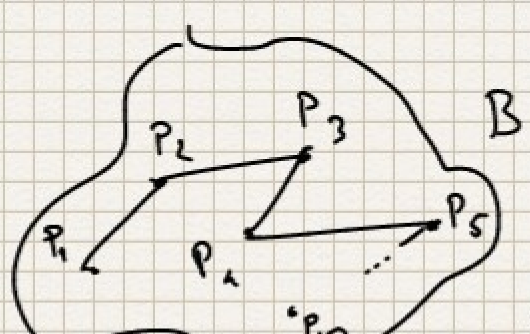
$$\int_{\partial\Delta} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

Si Δ est le triangle $1, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

Le Théorème de Goursat dira que $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$ si $\Delta \subseteq B$ et f holomorphe.

Avant d'aborder ce théorème introduisons encore la notation suivante :

Supposons $f : B \to \mathbb{C}$ continue et $P_1, \dots, P_n \in B$ tels que $[P_i, P_{i+1}] \subseteq B$ $i = 1, \dots, n-1$. Alors



$$\int_{P_1P_2\dots P_n} f\,dz = \int_{P_1P_2} f\,dz + \dots + \int_{P_{n-1}P_n} f\,dz$$

où P_iP_{i+1} est la chaîne définie ci-dessus.

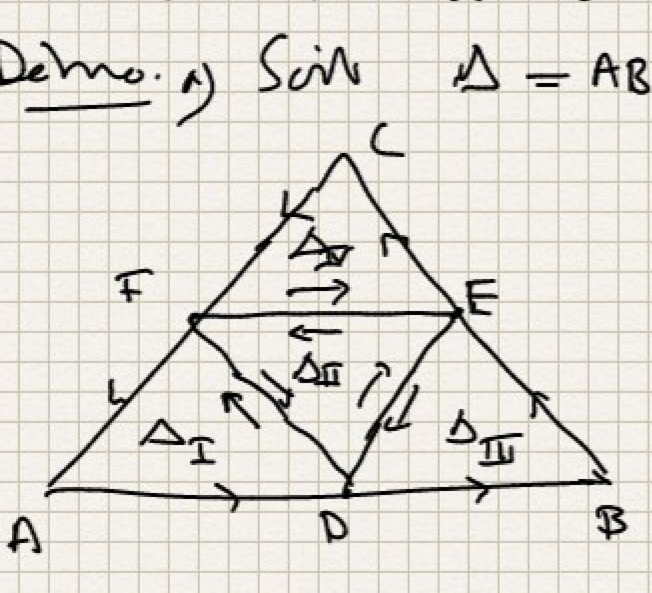
<u>Théorème de Goursat</u> Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $\Delta \subseteq B$. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ continue

a) Si f est holomorphe, alors

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$$

b) Si f est holomorphe sur $B \setminus \{z_0\}$ alors on a la même conclusion.

<u>Démo.</u> a) Soit $\Delta = ABC$ un triangle contenu dans le domaine de définition de f. On veut montrer que $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$



En faisant la subdivision de Δ comme indiqué, on voit que

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial\Delta_I} f\,dz + \int_{\partial\Delta_{II}} f\,dz + \int_{\partial\Delta_{III}} f\,dz + \int_{\partial\Delta_{IV}} f\,dz$$

Soit Δ_1 le triangle parmi $\Delta_I, \dots, \Delta_{IV}$ tel que

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz\right| = \max_{i=I,\dots,IV} \left|\int_{\partial\Delta_i} f\,dz\right|$$

Du coup

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz\right|$$

En réitérant, on construit une suite décroissante de triangles dans $\mathbb{C}$:

$$\Delta_0 = \Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \dots$$

telle que

$$\left|\int_{\partial\Delta_i} f\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_{i+1}} f\,dz\right|$$

pour $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Si on choisit à chaque étape les milieux des segments, on a, de plus,

$$l(\Delta_{i+1}) = \frac{1}{2}\, l(\Delta_i).$$

où $l(\Delta_i)$ est le périmètre du triangle Δ_i.
Du coup, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|$$

Comme $\operatorname{diam}(\Delta_i) \to 0$ $i \to \infty$, il existe $z_0 \in B$ tq. $\forall i \in \mathbb{N}$: $z_0 \in \Delta_i$

Comme f est holomorphe en z_0, on peut écrire

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) +$$
$$+ \varepsilon(z)(z - z_0)$$

où $\varepsilon \to 0$ $(z \to z_0)$. Comme la fonction $z \longmapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ possède une primitive,

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\, dz = 0.$$

Du coup

$$\int_{\partial\Delta_n} f\, dz = \int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z - z_0)\, dz$$

En particulier,

$$\left|\int_{\partial\Delta} f dz\right| \leq 4^n \cdot \left|\int_{\partial\Delta_n} f dz\right| =$$

$$= 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} \varepsilon(z)(z - z_0)\, dz\right|$$

$$\leq 4^n \cdot \left(\sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)(z - z_0)|\right) \cdot l(\partial\Delta_n)$$

$$\leq 4^n \left(\sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)|\right)\left(\sup_{z\in\partial\Delta_n} |z - z_0|\right) l(\partial\Delta_n)$$

$$\leq 4^n \left(\sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)|\right) \cdot l(\Delta_n)^2$$

$$= 4^n \left(\sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)|\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} l(\Delta)\right)^2$$

$$= l(\Delta)^2 \cdot \sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)| \longrightarrow l(\Delta) \times 0 = 0$$

car si $n \to \infty$ $\sup_{z\in\partial\Delta_n} |\varepsilon(z)| \to 0$.

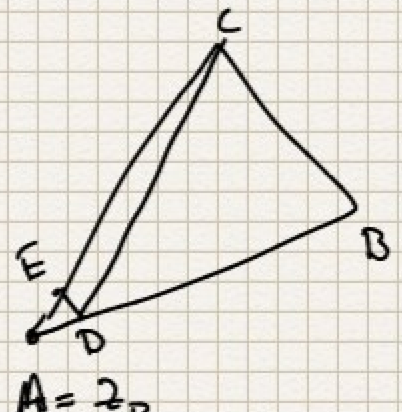
b). Soit $\Delta = ABC$ un triangle contenu dans le domaine de définition de f. On veut montrer que $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$.

Si $z_0 \notin \Delta$, on applique le petit a à la restriction de f à $B \setminus \{z_0\}$.

Supposons que $z_0 \in \Delta$. Il y a 3 cas :

<u>cas 1 : z_0 est un sommet de Δ.</u>

On peut supposer que $z_0 = A$.



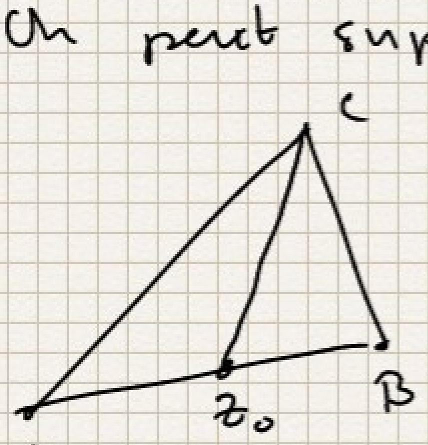
Choisir D et E sur les arêtes AB et AC respectivement, suff^t proche de A. D'après ce qui précède $\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial(ADE)} f\,dz$.

Or,
$$\left| \int_{\partial(ADE)} f\,dz \right| \leq \left(\sup_{ADE} |f|\right) \cdot \ell(ADE)$$
$$\leq \left(\sup_{\Delta} |f|\right) \cdot \ell(ADE)$$
$$\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } D, E \to A$$

Du coup $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$

<u>cas 2 : z_0 est à l'intérieur d'une arête de Δ</u>

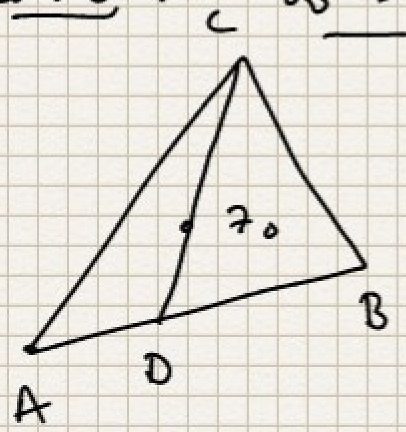
On peut supposer que $z_0 \in \,]A, B[$



On a
$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \int_{\partial(Az_0C)} f\,dz + \int_{\partial(z_0BC)} f\,dz$$
$$= 0 + 0$$

d'après le cas précédent.

Cas 3 : z_0 est dans l'intérieur de Δ



Soit $D \in [AB]$ tq $z_0 \in [C, D]$. Alors

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \int_{\partial ADC} f dz + \int_{\partial DBC} f dz$$

$$= 0 + 0$$

d'après le cas 2 $\square$

Remarque L'énoncé b reste valable s'il existe $z_0, \dots, z_n \in B$ tels que f est holomorphe sur $B \setminus \{z_0, \dots, z_n\}$. (exo)

Corollaire. Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et convexe et $f : B \to \mathbb{C}$ continue, et holomorphe sauf éventuellement en un nombre fini de points de B. Alors

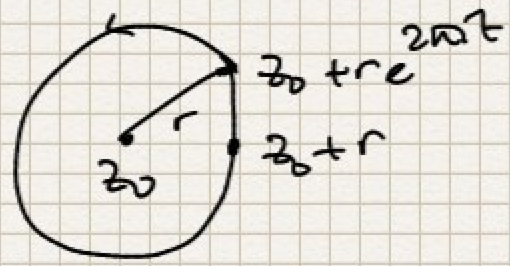
a) f possède une primitive sur B, et

b) pour toute chaîne fermée Γ dans B on a
$$\int_\Gamma f dz = 0$$

§3.2. Fonctions holomorphes et fonctions analytiques

Rappelons que $\bar{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$ est le disque fermé de centre z_0 et de rayon r. Son bord $\partial \bar{D}(z_0, r)$ est le cercle de centre z_0 et de rayon r qu'on considèrera comme chaîne fermé en le paramétrant par

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z_0 + re^{2\pi i t}$$



Théorème (la formule intégrale de Cauchy)
Soit $f : B \to \mathbb{C}$ holomorphe où $B \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Soit $z_0 \in B$ et $r>0$ tq $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r) \subseteq B$. Alors, pour tout $z \in D(z_0,r)$, on a

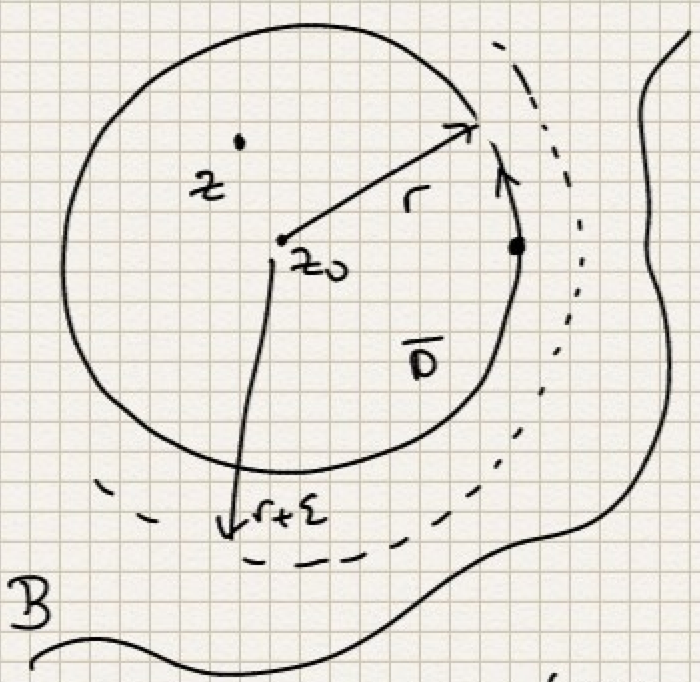
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Démo. Soit $z \in D(z_0, r)$ fixe.
Définissons $g : B \to \mathbb{C}$ par

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} & \text{si } \xi \neq z \\ f'(z) & \text{si } \xi = z \end{cases}$$

g est holomorphe sur $B \setminus \{z\}$ et continue sur B car f est holomorphe en z. D'après le corollaire précédent, appliqué à $g|_{D(z_0, r+\varepsilon)}$ où $\varepsilon > 0$ tq. $D(z_0, r+\varepsilon) \subseteq B$, et à la chaîne fermée $\partial \overline{D}$:

$$0 = \int_{\partial \overline{D}} g(\xi)\, d\xi = \int_{\partial \overline{D}} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\, d\xi$$



$$= \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int_{\partial \bar{D}} \frac{-f(z)}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + {} - f(z) \int_{\partial \bar{D}} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi =$$

$$= \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - 2\pi i\, f(z)$$

car $\displaystyle\int_{\partial \bar{D}} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = \int_{\partial \bar{D}(0,r)} \frac{1}{\xi}\, d\xi = 2\pi i$ $\square$