Montrons donc que

$$F'(\rho(t))\cdot\rho'(t) = (F\circ\rho)'(t).$$

En effet,

$$(F\circ\rho)'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(\rho(t))\cdot(\mathrm{Re}\,\rho)'(t) + $$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(\rho(t))\cdot(\mathrm{Im}\,\rho)'(t)$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial \bar z}\right)(\rho(t))\,(\mathrm{Re}\,\rho)'(t) +$$
$$+ \frac{1}{i}\left(\frac{\partial F}{\partial \bar z}-\frac{\partial F}{\partial z}\right)(\rho(t))\cdot(\mathrm{Im}\,\rho)'(t)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial z}(\rho(t))\cdot(\mathrm{Re}\,\rho)'(t) +$$
$$+ \frac{1}{i}\left(-\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot(\mathrm{Im}\,\rho)'(t)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial z}(\rho(t))\cdot\left((\mathrm{Re}\,\rho)'(t)+i(\mathrm{Im}\,\rho)'(t)\right)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial z}(\rho(t))\cdot\rho'(t) =$$
$$= F'(\rho(t))\cdot\rho'(t).$$

Du coup,

$$\int_\rho f\,dz = \int_a^b F'(\rho(t))\cdot\rho'(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b (F\circ\rho)'(t)\,dt =$$
$$= F(\rho(b)) - F(\rho(a)) = F(z_1) - F(z_0)$$

Cela montre l'énoncé pour une chaîne élémentaire.

Soit Γ un chaîne dans B de z_0 à z_1. On a $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ où γ_i est une chaîne élémentaire de v_i à w_i dans B.

Comme Γ va de z_0 à z_1, on a

$$\gamma_1(a_1) = z_0 = v_1$$
$$\gamma_1(b_1) = w_1 = v_2 = \gamma_2(a_2)$$

$\vdots$

$$\gamma_n(a_n) = \gamma_{n-1}(b_{n-1}) = w_{n-1} = v_n$$

$$\gamma_n(b_n) = w_n = z_1$$

où $\quad \gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow B.$

On a

$$\int_\Gamma f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \dots + \int_{\gamma_n} f dz$$

$$= \underline{F(w_1)} - F(v_1) + F(w_2) - \underline{F(v_2)} + \dots$$

$$\dots + F(w_n) - F(v_n) =$$

$$= -F(v_1) + F(w_n) = F(z_1) - F(z_0) \quad \square$$

<u>Corollaire</u> Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ continue admettant une primitive F. Alors pour toute chaîne fermée Γ, on a

$$\int_\Gamma f dz = 0$$

<u>Exemples</u>. 1) Soit Γ une chaîne fermée dans $\mathbb{C}$. Alors

$$\int_\Gamma z^n dz = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, z^n admet une primitive. $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$

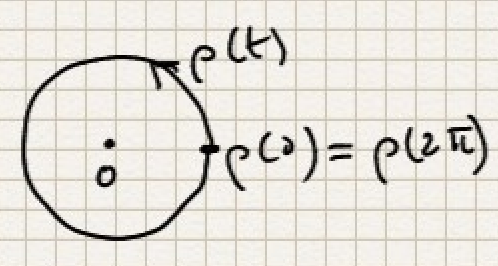
2) De même, la fonction holomorphe $z \longmapsto z^n$ sur $\mathbb{C}^*$ pour $n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$ possède une primitive à savoir $z \longmapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Du coup, pour toute chaîne fermée Γ dans $\mathbb{C}^*$, on a

$$\int_\Gamma z^n dz = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$.

3) Montrons que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En effet, soit

$$\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$$
$$t \mapsto e^{it}$$



ρ est un chemin élémentaire fermé dans $\mathbb{C}^*$.

Calculons

$$\int_\rho \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(t)} \cdot \rho'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot e^{it} \cdot i\,dt$$
$$= i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Par conséquent, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ ne possède pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$! C'est remarquable car $z \mapsto \frac{1}{z}$ est continue, même holomorphe !

L'énoncé suivant est un réciproque du corollaire précédent :

<u>Théorème</u>. Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe par arcs (i.e. n'importe quels points z_0 et z_1 peuvent être reliés par un arc dans B). Soit $f : B \to \mathbb{C}$ continue. Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaites :

1) pour toute chaîne fermée Γ dans B on a

$$\int_\Gamma f dz = 0 \quad , \quad \text{ou}$$

2) B est convexe et pour toute chaîne fermée Γ dans B dont le support est un triangle euclidien on a

$$\int_\Gamma f dz = 0.$$

Alors, f possède une primitive sur B.

<u>Démo</u>: Admettons dans un premier temps que la conditions 2 implique que f possède une primitive sur B. Montrons que condition 1 suffit également pour conclure que f possède une primitive.

Soit $a \in B$ fixe. Définissons

$$F : B \longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$F(z) = \int_\Gamma f dz$$

où Γ est une chaîne de a à z dans B. Une telle chaîne existe car B est connexe par arcs. Par contre, il en existe beaucoup, et il faut donc montrer que le second membre $\int f dz$ ne dépend pas du choix de Γ, i.e, il faut montrer que F est bien définie. Montrons donc que F est bien définie.

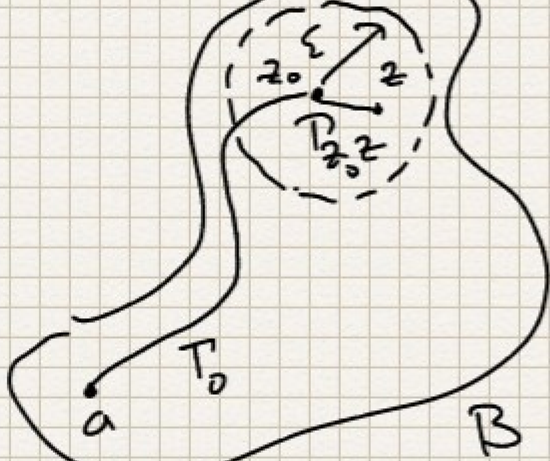
En effet, si Γ' est une autre chaîne de a à z alors

$$\int_{\Gamma} f dz - \int_{\Gamma'} f dz = \int_{\Gamma \cup -\Gamma'} f dz = 0$$

car $\Gamma \cup -\Gamma'$ est fermée. Par conséquent, F est bien définie. Montrons que F est holomorphe et que $F' = f$. Soit $z_0 \in B$. Comme B est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tq $D(z_0, \varepsilon) \subseteq B$. Remarquons que pour tout $z \in D(z_0, \varepsilon)$

$$F(z) = \int_{\Gamma_0} f dz + \int_{\Gamma_{z_0 z}} f dz$$

où Γ_0 est une chaîne de a à z_0 et $\Gamma_{z_0 z}$ est la chaîne dans $D(z_0, \varepsilon)$ de support le segment $[z_0, z]$ de z_0 à z. Or



$\int_{\Gamma_0} f dz$ est une constante. Il suffit donc de démontrer que la fonction

$$z \longmapsto \int_{\Gamma_{z_0 z}} f dz$$

est holomorphe sur $D(z_0, \varepsilon)$ et que sa dérivée est égale à f. Or, $D(z_0, \varepsilon)$ est convexe, donc ce qu'on a avant s'applique et on aura bien la conclusion que f possède une primitive.

Il suffit donc de démontrer que condition 2 implique que f possède une primitive.

On suppose donc B convexe et pour toute chaîne fermée Γ dont le support est un triangle on a

$$\int_\Gamma f dz = 0$$

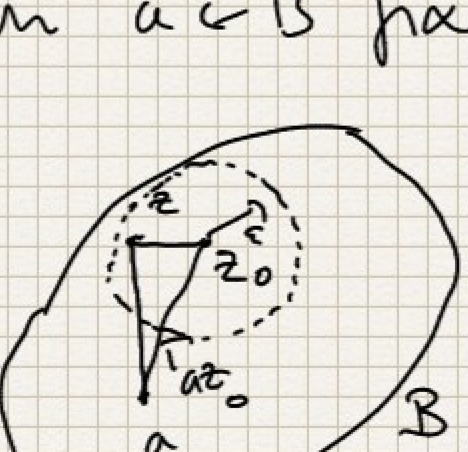
Comme ci-dessus, on définit

$$F : B \to \mathbb{C}$$

par

$$F(z) = \int_{\Gamma_{az}} f dz$$

où $a \in B$ fixe. On peut prendre



$$\Gamma_{az} = \{ [\rho_{az}] \}$$

où

$$\rho_{az}(t) = (1-t)a + tz$$

pour $t \in [0,1]$

Soit $z_0 \in B$ et montrons que F est holomorphe en z_0 et que $F'(z_0) = f(z_0)$.

Soit encore $\varepsilon > 0$ tq $D(z_0, \varepsilon) \subseteq B$
Soit $z \in D(z_0, \varepsilon)$. On a

$$F(z) = \int_{\Gamma_{az}} f\,dz = \int_{\Gamma_{az_0}} f\,dz + \int_{\Gamma_{z_0 z}} f\,dz$$

$$= F(z_0) + \int_{\Gamma_{z_0 z}} f\,dz$$

car f satisfait la condition 2.
Du coup

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\Gamma_{z_0 z}} f\,dz =$$

$$= \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) \cdot (z - z_0)\,dt$$

$$= (z - z_0) \cdot \int_0^1 f(((1-t)z_0) + tz)\,dt$$

$$= (z - z_0) \cdot \Delta(z)$$

où $\Delta(z) = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt$.

On doit montrer que Δ est continue en z_0 et que $\Delta(z_0) = f(z_0)$
Or,

$$\Delta(z_0) = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz_0)\,dt =$$

$$= \int_0^1 f(z_0)\,dt = f(z_0)$$

Montrons donc que Δ est continue en z_0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en z_0, il existe $\delta > 0$ tq

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$

Du coup, si $|z - z_0| < \delta$,

$$|\Delta(z) - \Delta(z_0)| =$$

$$= \left| \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt - f(z_0) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)|\,dt$$

$$\leq \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

car $(1-t)z_0 + tz \in D(z_0, \delta)$ pour tout $t \in [0,1]$. Cela implique la continuité de Δ en z_0

$\square$