II Intégrale sur une chaîne et primitives

§1 Intégrale sur une chaîne

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur le segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on sait que f est intégrable et que

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt \,,\, \int_a^b f_2(t)\,dt \right)$$

où $f = (f_1, f_2)$.
En écrivant tout ceci sous forme complexe on a :

Déf. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est le nombre complexe défini par

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (\mathrm{Re} f)(t)\,dt + i \int_a^b (\mathrm{Im} f)(t)\,dt$$

En traduisant les résultats qu'on a vu en analyse réelle, on obtient :

Prop Soient $f, f_2, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continues
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $c \in \,]a,b[$. Alors

a) la linéarité de $\int_a^b f\,dt$:

$$\int_a^b \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\,dt = \alpha \int_a^b f_1(t)\,dt + \beta \int_a^b f_2(t)\,dt$$

b) "l'inégalité triangulaire" :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

c) Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \quad \blacksquare$$

<u>Déf.</u> Soient z_0 et $z_1 \in \mathbb{C}$.
Un <u>arc élémentaire</u> ou un <u>chemin élémentaire</u> de z_0 à z_1 est une fonction continûment dérivable

$$\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $\rho(a) = z_0$ et $\rho(b) = z_1$.
Rappelons que "continûment dérivable" signifie ici que les fonctions $\mathrm{Re}\,\rho$ et $\mathrm{Im}\,\rho$ sont partiellement dérivables de dérivées partielles continues.

Soient $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\tilde{\rho} : [\tilde{a},\tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins élémentaires. On dit que ρ et $\tilde{\rho}$ sont <u>équivalents</u> s'il existe un difféomorphisme $\varphi : [a,b] \longrightarrow [\tilde{a},\tilde{b}]$ tel que $\varphi(a) = \tilde{a}$, $\varphi(b) = \tilde{b}$ et $\rho = \tilde{\rho} \circ \varphi$.
Rappelons que "difféomorphisme" signifie ici que φ est continûment dérivable, bijective et que φ^{-1} est continûment dérivable.

Une <u>chaîne élémentaire</u> est une classe d'équivalence d'un chemin élémentaire.

Soit $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin élémentaire. Le <u>support</u> de ρ est l'image de ρ :

$$\mathrm{supp}(\rho) = \mathrm{im}(\rho) = \rho([a,b])$$

Si γ est la chaîne élémentaire définie par ρ, on définit <u>le support</u> de γ par

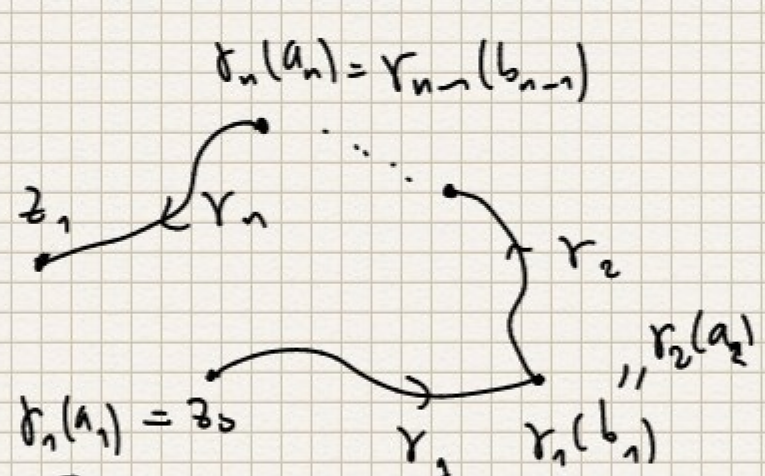
$$\mathrm{supp}(\gamma) = \mathrm{supp}(\rho).$$

Une <u>chaîne</u> Γ est un ensemble fini de chaînes élémentaires. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ est une chaîne, le <u>support</u> de Γ est

$$\mathrm{supp}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{supp}(\gamma_i)$$

Une chaîne $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ va de z_0 à z_1 si

$$\gamma_1(a_1) = z_0$$
$$\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$$
$$\gamma_2(b_2) = \gamma_3(a_3)$$
$$\vdots$$
$$\gamma_{n-1}(b_{n-1}) = \gamma_n(a_n)$$
$$\gamma_n(b_n) = z_1$$



où $\gamma_i : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{C}$

On pense à une telle chaîne comme une courbe continûment dérivable par morceaux à paramétrisation près.

Une <u>chaîne fermée</u> est une chaîne qui relie un point de $\mathbb{C}$ à lui-même.

<u>Def</u> Soit $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin élémentaire, et soit $f : \operatorname{supp}(\rho) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On définit l'intégrale de f sur ρ par

$$\int_a^b f(\rho(t)) \cdot \rho'(t)\, dt =: \int_\rho f(z)\, dz$$

<u>Prop.</u> Avec les notations ci-dessus, si $\tilde{\rho} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ est un chemin élémentaire équivalent à ρ, alors

$$\int_{\tilde{\rho}} f(z)\, dz = \int_\rho f(z)\, dz$$

<u>Démo</u>: Soit $\varphi : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ difféo tel que $\varphi(a) = \tilde{a}$, $\varphi(b) = \tilde{b}$ et $\rho = \tilde{\rho} \circ \varphi$.
On calcule

$$\int_{\tilde{\rho}} f(z)\, dz = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\rho}(u)) \cdot \tilde{\rho}'(u)\, du =$$

$$\underset{\substack{u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t) dt}}{=} \int_a^b f(\tilde{\rho}(\varphi(t))) \cdot \tilde{\rho}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(\rho(t)) \cdot (\tilde{\rho} \circ \varphi)'(t)\, dt = \int_\rho f(z)\, dz \quad \square$$

En conséquence, on a la définition suivante:

Def Soit γ la chaîne élémentaire déterminée par le chemin élémentaire ρ. Soit $f : \operatorname{supp}(\gamma) \to \mathbb{C}$. On définit l'intégrale de f sur γ par

$$\int_\gamma f\,dz := \int_\rho f\,dz$$

Plus généralement si $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ est une chaîne, on définit

$$\int_\Gamma f\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f\,dz.$$

où $f : \operatorname{supp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$

Prop. a) Soit Γ une chaîne et $f_1, f_2 : \operatorname{supp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ continues. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$\int_\Gamma \alpha f_1 + \beta f_2 \, dz = \alpha \cdot \int_\Gamma f_1\,dz + \beta \int_\Gamma f_2\,dz$$

b) Soit γ une chaîne élémentaire et $\rho : [a,b] \to \mathbb{C}$ l'un de ses représentants. Soit $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ "l'inversion" définie par

$$\varphi(t) = a+b-t$$

On définit le <u>chemin élémentaire inverse</u> $-\rho$ par

$$-\rho := \rho \circ \varphi$$

et la <u>chaîne élémentaire inverse</u> $-\gamma$ par

$$-\gamma = [-\rho]$$

classe d'équivalence de $-\rho$.

Alors, $-\gamma$ est bien définie et

$$\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz$$

où $f : \operatorname{supp}(\gamma) \to \mathbb{C}$ continue.

Démo. a) L'énoncé est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

où $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue.

b) Montrons que

$$\int_{-\rho} f\,dz = -\int_{\rho} f\,dz$$

On calcule,

$$\int_{-\rho} f\,dz = \int_a^b f((-\rho)(t)) \cdot (-\rho)'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f((\rho\circ\psi)(t)) \cdot (\rho\circ\psi)'(t)\,dt$$

$$= \int_{\psi(b)}^{\psi(a)} f(\rho(\psi(t))) \cdot \rho'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt$$

$$\underset{\substack{u=\psi(t)\\ du=|\psi'(t)|dt}}{=} \int_a^b f(\rho(u)) \cdot \rho'(u)\,du$$

$$= \int_\rho f\,dz$$

La démonstration que $-\gamma$ est bien définie est laissée à titre d'exercice. ☒

Déf Soit $\rho : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin élémentaire. La longueur de ρ est est le nombre réel défini par

$$l(\rho) = \int_a^b |\rho'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(\mathrm{Re}\,\rho'(t))^2 + (\mathrm{Im}\,\rho'(t))^2}\,dt$$

Prop. a) Si $\tilde{\rho} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ est équivalent à ρ ci-dessus, alors $\ell(\tilde{\rho}) = \ell(\rho)$

b). Si $f : \operatorname{supp}(\rho) \to \mathbb{C}$ est continue, alors

$$\left| \int_\rho f \, dz \right| \leq \sup_\rho (|f|) \cdot \ell(\rho)$$

où $\sup_\rho(|f|) = \sup \{ |f(\rho(t))| \mid t \in [a,b] \} \in \mathbb{R}^+$

Démo. a) Appliquer la formule du changement de variable à l'intégrale définissant $\ell(\tilde{\rho})$ où $\tilde{\rho} \circ \varphi = \rho$.

b) On a

$$\begin{aligned} \left| \int_\rho f \, dz \right| &= \left| \int_a^b f(\rho(t)) \cdot \rho'(t) \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b | f(\rho(t)) \cdot \rho'(t) | \, dt \\ &= \int_a^b |f(\rho(t))| \cdot |\rho'(t)| \, dt \\ &\leq \sup_\rho |f| \cdot \int_a^b |\rho'(t)| \, dt \\ &= \sup_\rho |f| \cdot \ell(\rho) \end{aligned}$$

$\square$

§2. Primitives

Déf. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction complexe où $B \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert. Une primitive de f (au sens complexe) est une fonction holomorphe

$$F : B \to \mathbb{C}$$

telle que $F' = f$.

Théorème fondamental de l'analyse:

Soit $f : B \to \mathbb{C}$ continue. Supposons que f admet une primitive F.
Alors, pour toute chaîne Γ de z_0 à z_1, on a

$$\int_\Gamma f\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Démo. Montrons l'énoncé d'abord pour une chaîne élémentaire $\Gamma = [\rho]$ où $\rho : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin élémentaire.
On calcule:

$$\int_\rho f\,dz = \int_a^b f(\rho(t))\,\rho'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b F'(\rho(t)) \cdot \rho'(t)\,dt$$

Attention: les deux primes ne sont pas les mêmes! F' est la dérivée au sens complexe de F, ρ' est la dérivée de ρ au sens réel. On doit démontrer que

$$F'(\rho(t)) \cdot \rho'(t) = (F \circ \rho)'(t).$$