Comme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,
on peut écrire

$$f(z) = s_n(z) + R_n(z)$$

où

$$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$$

et $$R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k.$$

Définissons $f_1 : D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

la série dérivée. On veut démontrer que $f$ est holomorphe en $D(0,R)$ et que $f'(z) = f_1(z)$ pour tout $z \in D(0,R)$. Soit $z_0 \in D(0,R)$. Considérons l'égalité suivante

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) =$$

$$= \frac{s_n(z) + R_n(z) - s_n(z_0) - R_n(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0)$$

$$= \left( \frac{s_n(z) - s_n(z_0)}{z - z_0} - s_n'(z_0) \right) +$$

$$\left( s_n'(z_0) - f_1(z_0) \right) +$$

$$\left( \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right)$$

Comme $s_n$ est une fonction polynomiale, $s_n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée en $z_0$ vaut $s_n'(z_0)$.

Du coup, le premier terme de l'équation ci-dessus converge vers 0 lorsque $z \to z_0$. Quant au deuxième terme, remarquons que $s_n'(z_0)$ est une somme partielle de $\sum n a_n z_0^{n-1} = f_1(z_0)$. Du coup, le deuxième terme de l'équation ci-dessus converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Il suffit donc de démontrer que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{N}$ $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall n \geq M$ et $\forall z \in D(z_0, \delta)$ on a

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon .$$

Or, $R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$. Du coup

$$\frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k z^k - a_k z_0^k}{z - z_0}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \left( z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1} \right)$$

Or, $|a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \dots + z_0^{k-1})| \leq$

$|a_k| \left( |z|^{k-1} + |z|^{k-2} |z_0| + \dots + |z_0|^{k-1} \right) \leq$

$|a_k| \left( \rho^{k-1} + \rho^{k-1} + \dots + \rho^{k-1} \right) =$

$= k |a_k| \rho^{k-1}$ où $|z|, |z_0| < \rho < R$.

Comme la série $\sum n a_n \rho^{n-1}$ est convergente, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} k |a_k| \rho^{k-1} \right| < \varepsilon.$$

Du coup, $\forall n \geq N\ \forall z \in D(0,\rho)$ :

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon$$

Par conséquent

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0) \longrightarrow 0$$

lorsque $z \to z_0$. Cela montre que $f$ est holomorphe en $z_0$ et que $f'(z_0) = f_1(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ ∎

<u>Corollaire</u>. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ défini par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Alors la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge sur $D(z_0, R)$ normalement et uniformément sur $D(z_0, \rho)$ avec $\rho < R$. De plus, si on pose

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$$

où $z \in D(z_0, R)$, alors $f$ est holomorphe et

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{n} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

pour tout $z \in D(z_0, R)$. ∎

**Déf.** $R$ est le <u>rayon de convergence</u> de la série $\sum a_n (z-z_0)^n$.

**Déf.** Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction complexe.
$f$ est <u>analytique en $z_0 \in B$</u> s'il existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tels que la rayon de convergence de la série $\sum a_n (z-z_0)^n$ est $> 0$ et on a

$$f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$$

au voisinage de $z_0$.
$f$ est <u>analytique</u> si $f$ est analytique en tout point de $B$

D'après le Théorème précédent, tout fonction analytique est holomorphe et sa dérivée est à nouveau analytique.

Si $f$ est analytique en $z_0$, alors les coefficients $a_n$ sont déterminés par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

On verra ci-dessous qu'en fait toute fonction holomorphe est nécessairement analytique.

Définissons la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$. On a envie de définir

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}.$$

Il faut donc vérifier que le rayon de convergence $R$ de cette série est égal à $+\infty$. Rappelons que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} =$$

$$= \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

Montrons donc que $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

On montre que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sqrt[n]{n!} \geq a$

i.e., $n! \geq a^n$.

Prendre $N = a^2 + a - 2$.

Soit $n \geq N$. Alors

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times (a^2+a-2) \times (a^2+a-3) \times \dots$$
$$\dots \times (a^2+1) \times a^2 \times \dots \times (a+1) \times a \times (a-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= n \times (n-1) \times \dots \times \frac{(a^2+a-2)}{a} \times \frac{(a^2+a-3)}{a} \times \dots$$
$$\dots \times \frac{(a^2+1)}{a} \times \frac{a^2}{a} \times \dots \times (a+1) \times a \times a(a-1) \times$$
$$\times a(a-2) \times \dots \times (a \times 3) \times (a \times 2) \times (a \times 1)$$

$$\geq a^n.$$

Du coup $\sqrt[n]{n!} \geq a$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$

D'où le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$
On peut donc définir

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

par
$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La fonction exp est analytique et donc holomorphe et

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

De plus, $\exp(0) = 1$

<u>Prop.</u> Soient $w, z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$$

<u>Démo.</u>: Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et considérons la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \exp(z + z_0) \cdot \exp(-z)$$

$f$ est holomorphe et

$$f'(z) = \exp(z+z_0)\exp(-z) +$$
$$+ \exp(z+z_0) \cdot \exp(-z)(-1)$$
$$= 0$$

Du coup, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z+z_0) \cdot \exp(-z) = c$$

En particulier, en prenant $z = 0$, on a

$$\exp(z_0) = c$$

Du coup $\exp(z+z_0) \cdot \exp(-z) = \exp(z_0)$

pour tout $z, z_0 \in \mathbb{C}$. En substituant $w+z$ pour $z_0$ et $-z$ pour $z$, on obtient

$$\exp(-z+w+z)\exp(z) = \exp(w+z)$$

D'où

$$\exp(w+z) = \exp(w)\cdot\exp(z)$$

pour tout $w, z \in \mathbb{C}$ ☒

Cette proposition suggère la notation

$$e^z := \exp(z)$$

où $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

<u>Corollaire</u>.

a) $\forall z \in \mathbb{C}$: $e^z \neq 0$

b) $\forall z \in \mathbb{C}$: $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

Rappelons que les fonctions trigonométriques réelles sont définies par

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>Prop.</u> Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons $z = x+iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

<u>Démo.</u> $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$.

Il suffit de montrer que

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

Or,

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i \times i^{2n} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(y) + i\sin(y). \qquad \square
\end{aligned}
$$

**Corollaire**

a) $|e^{x+iy}| = e^x$ et $\arg(e^{x+iy}) = y \pmod{2\pi}$

b) l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective.

c) Pour $w, z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(w) = \exp(z)$ ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tq. $w = z + 2ni\pi$.

En particulier, tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme exponentielle

$$z = r e^{i\vartheta}$$

où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$.