Soit $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction complexe définie sur un ouvert B de $\mathbb{C}$. On suppose que f est différentiable au sens réel.
Écrire $f = u + iv$
où
$u, v : B \to \mathbb{R}$
les équations de Cauchy-Riemann sont alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

les jacobienne de f est

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Donc f satisfait les équations de C-R ssi J_f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en tout point de B où $a, b \in \mathbb{R}$
Or, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

définit une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ si et seulement si $a = d$ et $b = -c$.

Par conséquent, f satisfait les équation de Cauchy-Riemann sur B ssi la différentielle de f est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point de B. Du coup, f est holomorphe ssi sa différentielle (au sens réel) est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point de B.

Proposition Soit $f : B \to \mathbb{C}$, où B est ouvert et connexe. Supposons f holomorphe les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Re}(f)$ est constante

(ii) $\mathrm{Im}(f)$ est constante

(iii) $|f|$ est constante

(iv) $\bar{f}$ est holomorphe

(v) $f'(z) = 0 \quad \forall z \in B$

(vi) f est constante

En particulier, si $f(B) \subseteq \mathbb{R}$, alors f est constante

Dém. Il est clair que la condition (vi) implique toutes les autres.

(i) ⇒ (vi) : On suppose $\mathrm{Re}(f)$ constante.

Du coup $\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y} = 0$ sur B.

D'après les équations de C-R,

$$\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x} = 0$$

Comme B est connexe, $\mathrm{Im} f$ est constante. Du coup, f est constante.

(ii) ⇒ (vi) : pareillement.

(iv) ⇒ (vi) : Supposons $\bar{f}$ holomorphe.

Du coup $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ est holomorphe.

Or $\mathrm{Im}(\mathrm{Re} f) \equiv 0$ i.e. $\mathrm{Im}(\mathrm{Re} f)$ est une application constante. D'après l'implication (ii) ⇒ (vi), $\mathrm{Re}(f)$ est constante. De même, $\mathrm{Im}(f)$ est constante. Par conséquent, f est constante.

(iii) ⇒ (vi) : Supposons que $|f|$ est constante.

Si $|f| \equiv 0$, $f \equiv 0$. On peut donc supposer que $|f| \equiv c \neq 0$ où $c \in \mathbb{R}^+$. En particulier $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B$. Du coup $\frac{|f|^2}{f} : B \to \mathbb{C}$

est holomorphe. Or $\frac{|f|^2}{f} = \bar{f}$.
D'après l'implication (iv) ⇒ (vi), f est constante.

<u>(v) ⇒ (vi)</u> On suppose que $f'(z) = 0 \ \forall z \in B$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sur B. Du coup,

$$0 = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

En effet, si on écrit $f = u + iv$ avec $u, v : B \to \mathbb{R}$, alors

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)}$$

$$= \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)}\left(\overline{(u+iv)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u - iv) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{f}.$$

D'après C-R, $\bar{f}$ est holomorphe.
D'après le (iv) ⇒ (vi) f est constante. □

§ <u>1.5</u>. <u>Séries entières.</u>

Rappelons des définitions et propriétés de suites et séries complexes.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (a_n) <u>converge et tend vers ℓ</u> si

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \ |a_n - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas, ℓ est unique et on note

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$$

Une suite (a_n) est de <u>Cauchy</u> si

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$

$\mathbb{C}$ est complet i.e, toute suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ est convergente.

Corollaire Soient (a_n) et (b_n) des suites dans $\mathbb{C}$ avec

$$|b_m - b_n| \leq |a_m - a_n| \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Si (a_n) est convergente, alors (b_n) est convergente. ☒

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$
On définit la n-ième somme partielle de (a_n) par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$$

On dit que la série $\sum a_n$ converge si la suite (s_n) converge.
Dans ce cas on définit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Critère de Cauchy : supposons que
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N} : \; |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$
Alors, la série $\sum a_n$ converge
De plus, si une série $\sum a_n$ converge, elle satisfait le critère de Cauchy.
En particulier, si on prend $p = 0$, la suite (a_n) converge et tend vers 0, i.e.

$$\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \to 0$$

L'implication réciproque est fausse : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ ne converge pas, pourtant $\frac{1}{n} \to 0$
$\sum a_n$ est <u>normalement convergente</u> ou <u>absolument convergente</u> si $\sum |a_n|$ converge.

$$\sum a_n \text{ normalt convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

l'implication réciproque est fausse : la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge non normalement.

Soient $f_n : B \to \mathbb{C}$ des fonctions complexes sur un ouvert B de $\mathbb{C}$.
On a donc une suite de fonctions (f_n)
On dit que la suite (f_n) <u>converge</u> (simplement ou ponctuellement) si $\forall z \in B$ la suite $(f_n(z))$ converge.
Dans ce cas,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(z) := \lim_{n\to\infty} (f_n(z))$$

définit la fonction limite.

$$\lim_{n\to\infty} f_n : B \to \mathbb{C}$$

En général, $\lim f_n$ n'est pas continue même si toutes f_n le sont.
On dit que la suite (f_n) <u>converge uniformément</u> vers $l : B \to \mathbb{C}$ si
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \forall z \in B$

$$|f_n(z) - l(z)| < \varepsilon.$$

Si (f_n) converge uniformément et toutes les f_n sont continues alors la limite $\lim f_n$ est continue.
Critère de Cauchy pour la convergence uniforme:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N \ \forall z \in B$:

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

la série de fonctions $\sum f_n$ converge si pour tout $z \in B$ $\sum f_n(z)$ converge.
Dans ce cas

$$\left(\sum f_n\right)(z) = \sum (f_n(z))$$

la série $\sum f_n$ <u>converge normalement ou absolument</u> si $\forall z \in B$ $\sum f_n(z)$ converge normalement

$\sum f_n$ converge uniformément sur B si la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément, où

$$S_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$$

M-test de Weierstraß.

Supposons que $\forall z \in B: |f_n(z)| \leq M a_n$ où $a_n \in \mathbb{R}^+$, $M \in \mathbb{R}^n$ et $\sum a_n$ converge. Alors, la série $\sum f_n$ converge uniformément.

Un peu plus généralement si

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq M\, |a_m - a_n|$$

alors $\sum f_n$ converge uniformément.

Théorème (Hadamard)

Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ et considérons la série $\sum a_n z^n$. Alors, il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ayant les propriétés suivantes

(i) la série $\sum a_n z^n$ converge normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$.
De plus, si $\rho \in \mathbb{R}^+$ avec $\rho < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $|z| \leq \rho$.

(ii) Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge

(iii) Soit $f: D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \sum a_n z^n$. Alors f est holomorphe et

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

De plus, on a la formule suivante:

$$\frac{1}{R} = \lim_{N \to \infty} \left(\sup_{n \geq N} \sqrt[n]{|a_n|} \right)$$

$$=: \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Démo. (i) Soit $|z| < R$ où R est défini par la formule ci-dessus.
Soit $\rho \in \mathbb{R}^+$ tq $|z| < \rho < R$.
Du coup $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R}$. Comme

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

il existe $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$ $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$
Du coup $\forall n \geq N$: $|a_n| < \frac{1}{\rho^n}$
et aussi $|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$
Comme $0 \leq \frac{|z|}{\rho} < 1$, la série $\sum \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ converge. D'après le M-test de Weierstraß, la série $\sum |a_n z^n|$ converge. La série $\sum a_n z^n$ converge donc normalement lorsque $|z| < R$.
Montrons ensuite la convergence uniforme de la série $\sum a_n z^n$ sur $|z| \leq \rho$ où $\rho < R$. Il existe $\rho' \in \mathbb{R}^+$ tq $\rho < \rho' < R$. Comme $\frac{1}{\rho'} > \frac{1}{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho'}$.
Du coup $\forall z$ avec $|z| \leq \rho$ on a

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{1}{\rho'}\right)^n \rho^n = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$$

Comme $0 \leq \frac{\rho}{\rho'} < 1$, la série $\sum \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ converge.
Du coup, la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément et normalement.

(ii) Supposons que $|z| > R$.
Du coup $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R}$. Prendre $\rho \in \mathbb{R}^+$ tq $|z| > \rho > R$. Du coup $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$
Comme $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$,
$\forall N \in \mathbb{N}$ tq $\exists n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{\rho}$.
i.e., $|a_n| > \frac{1}{\rho^n}$
D'où $\forall N \in \mathbb{N}$: $\exists n \geq N$: $|a_n z^n| \geq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n > 1$ car $\frac{|z|}{\rho} > 1$
et $a_n z^n \not\to 0$. La série $\sum a_n z^n$ diverge.

(iii) Commençons par démontrer que le R de la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ est égal au nombre R de la série $\sum a_n z^n$, i.e. montrons que

$$\limsup \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

Pour cela il suffit de démontrer que $\sqrt[n]{n} \to 1$ lorsque $n \to \infty$

En effet, écrivons $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$

Du coup $n = (1+\delta_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} \delta_n^2$

$= 1 + \frac{1}{2} n(n-1) \delta_n^2$ Donc

$$n-1 \geq \frac{1}{2} n(n-1) \delta_n^2$$

Donc aussi

$$\delta_n^2 \leq \frac{2}{n} \to 0$$

D'où $\delta_n^2 \to 0$ et $\delta_n \to 0$

Du coup $\sqrt[n]{n} \to 1 + 0 = 1$

Par conséquent, la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ converge pour $|z| < R$

Montrons que f est holomorphe sur $|z| < R$ et que

$$f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$$

pour tout z avec $|z| < R$.