§3 Fonctions holomorphes

Déf Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $a \in B$. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. On dit que f est dérivable au sens complexe en a, ou encore $\mathbb{C}$-dérivable en a, ou encore holomorphe en a si

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existe. Si cette limite existe, on la note

$$f'(a).$$

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point a de B, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable, ou encore holomorphe.

Remarque. Une fonction $f : B \to \mathbb{C}$ est aussi une fonction $f : B \to \mathbb{R}^2$ avec $B \subseteq \mathbb{R}^2$ en identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$. On verra qu'une fonction holomorphe est différentiable comme fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, mais que la réciproque est loin d'être vrai.

Prop. Soit $f : B \to \mathbb{C}$ et $a \in B$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

i) f est holomorphe en a

ii) il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a) - L(z-a)}{z-a} = 0$$

iii) Il existe une application $\Delta : B \to \mathbb{C}$ continue en a telle que

$$f(z) = f(a) + (z-a)\Delta(z)$$

iv) Il existe une application $\varepsilon : B \to \mathbb{C}$ et un nombre complexe c tels que

$$f(z) = f(a) + c(z-a) + (z-a)\varepsilon(z)$$

où $\varepsilon(z) \to 0$ si $z \to a$

De plus, si ces conditions sont vérifiées on a

$L(z) = f'(a)z$, $c = f'(a)$ et

$$\Delta(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

$$\varepsilon(z) = \Delta(z) - f'(a)$$

Démo. Les conditions (iii) et (iv) sont clairement équivalentes si on pose $\varepsilon = \Delta - \Delta(a)$ ou $\Delta = c + \varepsilon$

(i) ⇒ (ii) On suppose que la limite

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}$$

existe et on l'appelle c.

On définit une application $\mathbb{C}$-linéaire $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $L(z) = cz$.

On montre que

$$\frac{f(z) - f(a) - L(z-a)}{z-a} \to 0$$

Or, $\frac{f(z)-f(a) - L(z-a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} - c \to 0$

(ii) ⇒ (i) Supposons qu'il existe $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linéaire telle que

$$\frac{f(z) - f(a) - L(z-a)}{z-a} \to 0$$

Montrons que f est holomorphe en a. On sait qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tq

$$L(z) = cz$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Du coup, on a

$$0 \leftarrow \frac{f(z)-f(a) - L(z-a)}{z-a} = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} - c$$

Donc $\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe, et d'ailleurs elle est égale à c.

<u>(i) ⇒ (iii)</u> : On définit $\Delta : B \to \mathbb{C}$ par

$$\Delta(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ c & \text{si } z = a \end{cases}$$

où $c = \lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Par construction, Δ est continue en a. On a

$$(z-a)\,\Delta(z) = f(z) - f(a)$$

lorsque $z \neq a$. Les deux membres de cette équation sont continues en $z = a$ et de limite 0 en a.
En effet

$$\lim_{z\to a} (z-a)\Delta(z) = \lim_{z\to a}(z-a) \cdot \lim_{z\to a} \Delta(z)$$
$$= 0 \times c = 0$$

et

$$\lim_{z\to a} f(z) - f(a) = \lim_{z\to a} (z-a) \cdot \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$
$$= \lim_{z\to a}(z-a) \cdot \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} =$$

$= 0 \times c = 0$

On en déduit que

$$(z-a)\Delta(z) = f(z) - f(a)$$

quel que soit $z \in B$.

Du coup

$$f(z) = f(a) + (z-a)\Delta(z)$$

pour tout $z \in B$, où Δ est une fonction continue en a.

$\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$: Supposons qu'il existe $\Delta : B \to \mathbb{C}$ continue en a telle que

$$f(z) = f(a) + (z-a)\Delta(z)$$

Montrons que f est holomorphe en a.

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \Delta(z) \to \Delta(a) \quad (z \to a)$$

car Δ continue. ☐

<u>Prop.</u> Soient $f_1, f_2 : B \to \mathbb{C}$ et $a \in B$. Supposons que f_1 et f_2 sont holomorphes en a. Alors

(i) $f_1 + f_2 : B \to \mathbb{C}$ est holomorphe en a, et $(f_1+f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$

(ii) $f_1 f_2 : B \to \mathbb{C}$ est holomorphe en a, et $(f_1 f_2)'(a) = f_1'(a) f_2(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a)$

(iii) si $f_2(z) \neq 0$ pour tout $z \in B$, $\frac{f_1}{f_2} : B \to \mathbb{C}$ est holomorphe en a, et $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(a) = \frac{f_1'(a) f_2(a) - f_1(a) f_2'(a)}{f_2(a)^2}$.

<u>Démo.</u> (exo)

<u>Prop.</u> Soient $f_1 : B_1 \to \mathbb{C}$ et $f_2 : B_2 \to \mathbb{C}$ avec $f_1(B_1) \subseteq B_2$. Soit $a \in B$. Supposons que f_1 est holomorphe en a et que f_2 est holomorphe en $f_1(a)$.

Alors $f_2 \circ f_1 : B_1 \to \mathbb{C}$ est holomorphe en a, et

$$(f_2 \circ f_1)'(a) = f_2'(f_1(a)) \cdot f_1'(a).$$

Démo. (exo)

Exemples 1) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction constante, i.e., $\exists c \in \mathbb{C}$ tq. $f(z) = c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et $f'(z) = 0$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$. En effet, pour $z \neq a$,

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{c - c}{z - a} = 0 \to 0 \quad (z \to a)$$

2) L'application identité $id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $id'(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet, pour $z \neq a$, on a

$$\frac{id(z) - id(a)}{z - a} = \frac{z - a}{z - a} = 1 \to 1 \quad (z \to a)$$

3) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale, i.e.,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors, f est holomorphe et

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4) Soit $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application de conjugaison, i.e., $\gamma(z) = \bar{z}$. Montrons que γ n'est holomorphe en aucun point a de $\mathbb{C}$.
Par l'absurde, supposons que γ est holomorphe en un point $a \in \mathbb{C}$.

Il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tq

$$\frac{\gamma(z)-\gamma(a)}{z-a} \longrightarrow c \quad (z \to a)$$

En particulier, en prenant la suite (z_n) définie par

$$z_n = a + \frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

on a

$$c \longleftarrow \frac{\gamma(z_n)-\gamma(a)}{z_n - a} = \frac{\overline{(a+\frac{1}{n})} - \overline{a}}{(a+\frac{1}{n}) - a}$$

$$= \frac{\overline{a} + \frac{1}{n} - \overline{a}}{\frac{1}{n}} = \frac{(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 1$$

D'où $c = 1$. En prenant maintenant la suite (z_n) définie par

$$z_n = a + i\frac{1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a

$$c \longleftarrow \frac{\gamma(z_n)-\gamma(a)}{z_n - a} = \frac{\overline{(a+i\frac{1}{n})} - \overline{a}}{(a+i\frac{1}{n}) - a}$$

$$= \frac{\overline{a} - i\frac{1}{n} - \overline{a}}{i\frac{1}{n}} = \frac{(-i\frac{1}{n})}{(i\frac{1}{n})} = -1$$

D'où $c = -1$ Contradiction.

§4. Les équations de Cauchy-Riemann

Rappelons qu'une application $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, est différentiable en $a \in B$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(z) = f(a) + L(z-a) + |z-a| \cdot \varepsilon(z)$$

où $\varepsilon : B \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\varepsilon(z) \to 0$ $(z \to a)$. Dans ce cas, on dira aussi que f est dérivable en a au sens réel ou encore $\mathbb{R}$-dérivable en a.

Prop. Soit $f : B \to \mathbb{R}^2$, $a \in B$.
f est différentiable en a ssi il existe des applications
$$\Delta_1, \Delta_2 : B \to \mathbb{R}^2$$
continues en a telles que
$$f(z) = f(a) + (x-a_1)\Delta_1(z) + (y-a_2)\Delta_2(z)$$
pour tout $z \in B$ où $a = (a_1, a_2)$ et $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$

Démo. (exo)
On sait qu'une application différentiable est partiellement dérivable, et on aura
$$\Delta_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ et } \Delta_2(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$
dans l'énoncé ci-dessus.

Prop: Soit $f : B \to \mathbb{C}$ et $a \in B$
Alors f est $\mathbb{R}$-dérivable en a ssi il existe $A_1, A_2 : B \to \mathbb{C}$ continues en a telles que
$$f(z) = f(a) + (z-a)A_1(z) + (\bar{z}-\bar{a})A_2(z)$$
Démo. On sait qu'il existe $\Delta_1, \Delta_2 : B \to \mathbb{C}$ continues en a telles que
$$f(z) = f(a) + (x-a_1)\Delta_1(z) + (y-a_2)\Delta_2(z)$$
En substituant
$$x = \tfrac{1}{2}(z+\bar{z}),\ y = \tfrac{1}{2i}(z-\bar{z}),\ a_1 = \tfrac{1}{2}(a+\bar{a})$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2i}(a-\bar{a}),$$

on trouve

$$f(z) = f(a) + (x-a_1)\Delta_1(z) + (y-a_2)\Delta_2(z)$$

$$= f(a) + \left(\tfrac{1}{2}(z+\bar z) - \tfrac{1}{2}(a+\bar a)\right)\Delta_1(z) + \left(\tfrac{1}{2i}(z-\bar z) - \tfrac{1}{2i}(a-\bar a)\right)\Delta_2(z)$$

$$= f(a) + \left(\tfrac{1}{2}(z-a) + \tfrac{1}{2}(\bar z-\bar a)\right)\Delta_1(z) + \left(\tfrac{1}{2i}(z-a) - \tfrac{1}{2i}(\bar z-\bar a)\right)\Delta_2(z)$$

$$= f(a) + (z-a)\left(\tfrac{1}{2}\Delta_1(z) + \tfrac{1}{2i}\Delta_2(z)\right) + (\bar z-\bar a)\left(\tfrac{1}{2}\Delta_1(z) - \tfrac{1}{2i}\Delta_2(z)\right)$$

On pose donc

$$A_1(z) = \tfrac{1}{2}\Delta_1(z) + \tfrac{1}{2i}\Delta_2(z)$$

et $A_2(z) = \tfrac{1}{2}\Delta_1(z) - \tfrac{1}{2i}\Delta_2(z)$.

L'implication réciproque est laissée à titre d'exercice. $\blacksquare$

Rappelons que, sous ces conditions,
$\Delta_1(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\Delta_2(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Du coup, compte tenu des formules pour A_1 et A_2 ci-dessus, on définit formellement

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

lorsque f est partiellement dérivable en a.

Théorème Soit $f : B \to \mathbb{C}$, $a \in B$. Supposons que f est $\mathbb{R}$-dérivable en a. Alors f est holomorphe en a ssi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0.$$

Démo. (exo)

Corollaire (équations de Cauchy-Riemann) Soit $f : B \to \mathbb{C}$, $a \in B$. Supposons que f est $\mathbb{R}$-dérivable en a. Alors f est holomorphe en a ssi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial x}(a) = \frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial x}(a) = -\frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial y}(a) \end{cases}$$

Démo. En effet, on applique le Théorème précédent et on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2}i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{Re} f + i \,\mathrm{Im} f)\right)(a) + \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f)\right)(a)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2}i\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2}i\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y}(a) + -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y}(a)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x}(a) - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y}(a)\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}(a) + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y}(a)\right)$$

Si ce nombre complexe est nul, on obtient

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a) - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a) = 0$$

et

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(a) + \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(a) = 0 \qquad \square$$

Exemple Prendre $f(z) = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Écrire

$$f(x, y) = x - iy.$$

Donc

$$(\operatorname{Re} f)(x, y) = x$$

$$(\operatorname{Im} f)(x, y) = -y.$$

On a

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(a) - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(a) = 1 - (-1) = 2 \neq 0$$

quel que soit a

Par conséquent, les équations de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites pour la conjugaison complexe. Cette fonction n'est donc pas holomorphe comme on avait vu précédemment.