Variable complexe

I. Nombres et fonctions complexes
II. Intégrale sur une chaîne et primitives
III Fonctions holomorphes
IV Indice d'un cycle et Théorème de Cauchy
V Théorème des résidus
VI Autres résultats

Bibliographie

H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes
P. Dolbeault, Analyse complexe
M.R. Spiegel, Variables complexes
Ahlfors : Complex analysis

I Nombres et fonctions complexes.

§1 Nombres complexes

Rappelons que

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si on définit

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

où $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit une loi de composition interne multiplicative sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$\mathbb{R}^2$, considérer avec les lois $+$ et $\cdot$ est noté $\mathbb{C}$, et est un corps!

C'est le corps des nombres complexes.

En fait, si $(x,y) \in \mathbb{C}$, $(x,y) \neq 0$, alors

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

On note i l'élément $(0,1)$ de $\mathbb{C}$.

On a $i^2 = (-1, 0) = -1$ car $1 = (1,0)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(x) = (x, 0)$. Alors, f est un morphisme de corps. En particulier f est injectif. On pourra donc identifier $\mathbb{R}$ avec son image dans $\mathbb{C}$.

Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = x + iy \quad \text{où } x, y \in \mathbb{R}$$

x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, son conjugué est le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy$$

si $z = x + iy$. Cela définit une application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Géométriquement, l'application de conjugaison complexe est la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe des x.

Prop. L'application de conjugaison $z \to \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$. Plus précisément :

1) elle est bijective
2) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

La conjugaison complexe possède encore les propriétés suivantes :

4) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
5) $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ et $z\bar{z} \geq 0$
6) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

Démo : exo.

En fait, si $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ alors
$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = \|(x,y)\|^2$$
où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On définit
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \|(x,y)\|.$$
C'est le module du nombre complexe z.
On a les propriétés suivantes :

1) $|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$
2) $|z| = 0 \iff z = 0$
3) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (l'inégalité triangulaire)
4) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
5) si $z \in \mathbb{R}$, $|z| = |z|$, la valeur absolue de z comme élt de $\mathbb{R}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, il existe $\vartheta \in \mathbb{R}$ tq
$$z = |z| \cdot (\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$$
De plus, si $z \neq 0$ et $\vartheta \in]-\pi, \pi]$, alors ϑ est uniquement déterminé par cette équation. On l'appelle l'argument principal de z.

Si $z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$
et
$z_2 = r_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$,
où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\right)$$

<u>La formule de de Moivre</u> :

Si $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$
alors

$$z^n = r^n\left(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\right)$$

Cette formule permet de déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe donné : Soit $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$. On détermine les nombres complexes w tels que

$$w^n = z.$$

Écrire $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ où $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $w^n = z$, on a

$$\rho^n\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right) = r\left(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\right)$$

D'où $\rho^n = r$ et $n\alpha = \vartheta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Comme $\rho, r \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

Comme $n\alpha = \vartheta + 2k\pi$, on a

$$\alpha = \frac{1}{n}\vartheta + \frac{2k\pi}{n}$$

En faisant la division euclidienne de k par n, on écrit $k = qn + p$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \le p < |n|$
Du coup

$$\alpha = \frac{1}{n}\vartheta + \frac{2p\pi}{n} + 2q\pi$$

Comme

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2p\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2p\pi}{n}\right)$$

on obtient que les solutions de $w^n = z$ sont

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2p\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{1}{n}\vartheta + \frac{2p\pi}{n}\right)\right)$$

où $p = 0, \dots, |n| - 1$.

Ces solutions sont toutes différentes si $z \neq 0$.

Prop. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Alors l'équation $w^n = z$ possède exactement n solutions distinctes.

Le cas particulier où $z = 1$ est intéressant et donne lieu aux racines n-ièmes de l'unité :

$$\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2p\pi}{n}\right), \quad p = 0, \to |n|-1.$$

§2 Topologie de $\mathbb{C}$ et fonctions complexes

Soit $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Le disque ouvert de centre z_0 et de rayon ε est

$$D_\varepsilon(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$

Soit $B \subseteq \mathbb{C}$. B est ouvert si pour tout $z \in B$ il existe $\varepsilon > 0$ tq. $D_\varepsilon(z) \subseteq B$. Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ et $z \in B$. B est un voisinage de z si $\exists \varepsilon > 0$ tq $D_\varepsilon(z) \subseteq B$. Donc un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble qui est voisinage de tous ses points.

Soit $F \subseteq \mathbb{C}$. F est fermé si son complémentaire $\mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (z_n) converge et tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \cdot \forall n \geq N : \ |z_n - a| < \varepsilon$$

Dans ce cas, a est uniquement déterminé par (z_n) et est la limite de (z_n).

Notation : $\lim z_n = a$.

Une suite (z_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall p, q \geq N : \ |z_p - z_q| < \varepsilon$$

Une suite convergente dans $\mathbb{C}$ est de Cauchy. Réciproquement, toute suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ converge.

Soient (z_n) et (w_n) deux suites convergentes dans $\mathbb{C}$. Alors

la suite $(z_n + w_n)$ converge et
$$\lim (z_n + w_n) = (\lim z_n) + (\lim w_n),$$
la suite $(z_n \cdot w_n)$ converge et
$$\lim (z_n \cdot w_n) = (\lim z_n) \cdot (\lim w_n)$$
De plus, si $\lim w_n \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{z_n}{w_n}\right)_{n \geq N}$ converge et
$$\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{(\lim z_n)}{(\lim w_n)}$$
où $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$: $w_n \neq 0$.

<u>Déf.</u> Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Soit $a \in B$. On dit que f est <u>continue en a</u> si pour toute suite (z_n) dans B convergent vers a, on a
$$\lim f(z_n) = f(a)$$
f est <u>continue</u> si f est continue en tout point a de B.

<u>Déf.</u> Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$. On peut écrire $f = f_1 + i f_2$ où $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$. f_1 est la <u>partie réelle</u> de f et f_2 est la <u>partie imaginaire</u> de f.
En fait, $f_1 = \mathrm{Re} \circ f$ et $f_2 = \mathrm{Im} \circ f$.

<u>Prop.</u> Soit $f : B \rightarrow \mathbb{C}$. f est continue ssi sa partie réelle et sa partie imaginaires sont des fonction réelles continues.

<u>Prop.</u> Soient $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{C}$ où $B \subseteq \mathbb{C}$. Soit $a \in B$ et supposons que f_1 et f_2 sont continues en a. Alors

1) $f_1 + f_2$ est continue en a
2) $f_1 \cdot f_2$ est continue en a
3) si $f_2(z) \neq 0$ quel que soit $z \in B$, $\frac{f_1}{f_2} : B \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en a.

<u>Prop.</u> Soient $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}$ ouverts et $f_1 : B_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : B_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ continues

telles que $f_1(B_1) \subseteq B_2$. Alors la composition $f_2 \circ f_1 : B_1 \to \mathbb{C}$ est continue.

Exemples :

1) L'application identité $id : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ est continue
2) Soit $c \in \mathbb{C}$. L'application constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = c$ $\forall z \in \mathbb{C}$ est continue.
3) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application polynomiale, i.e, $\exists n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Alors f est continue.
4) L'application de conjugaison $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ est continue
5) L'application module $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ est continue

Def Soit $B \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe adhérent à B c-à-d, $\forall \varepsilon > 0$: $D_\varepsilon(a) \cap B \neq \emptyset$.
Soit $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction complexe
Soit $l \in \mathbb{C}$. On dit que f possède une limite en a et que cette limite vaut l si pour toute suite (z_n) dans B avec $z_n \neq a$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), la suite $(f(z_n))$ converge et tend vers l. Dans ce cas, l est uniquement déterminée et on l'appelle la limite de f en a, et on écrit

$$\lim_{z \to a} f(z) = l.$$

Remarque Une application $f : B \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in B$ ssi $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.