Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Examen terminal 2nd session, 7 juillet 2020, 9h00–12h00

L'utilisation des documents de cours et de TD est autorisée ; celle d'appareils électroniques est interdite. Justifier les réponses.

Exercice 1. Soit $\gamma\colon]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée gauche de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(-\tfrac{1}{2}\,\pi + \tfrac{1}{2}\,t)\cos(2\,t),\ \cos(-\tfrac{1}{2}\,\pi + \tfrac{1}{2}\,t)\sin(2\,t),\ \sin(-\tfrac{1}{2}\,\pi + \tfrac{1}{2}\,t)).$$

(a) Déterminer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ à γ en t.

(b) Montrer que γ est régulière.

(c) La paramétrisation γ en est-elle une par longueur d'arc ?

(d) Déterminer la courbure $\kappa(t)$ de γ en t.

(e) Montrer que $\kappa(t) \neq 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}z^2.$$

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $S = f^{-1}(1)$.

(a) Montrer que 1 est une valeur régulière de f.

(b) En déduire que S est une surface $\mathcal{C}^\omega$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit U l'ouvert $]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ l'application $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\sigma(u, v) = (\cos(u)\cos(v)/\sqrt{2}, \sin(u)\cos(v), \sin(v)\sqrt{2}).$$

(c) Montrer que $\operatorname{im}(\sigma) \subseteq S$.

(d) Déterminer la différentielle $D_q\sigma$ de σ en tout point q de U.

(e) Montrer que $D_q\sigma$ est de rang 2 quel que soit $q \in U$.

On admettra que σ est une paramétrisation locale de la surface S faisant partie d'un atlas $\mathcal{C}^\omega$ définissant une orientation sur S. Soit $\mathbf{n}\colon S \to S^2$ l'application qui associe à un point p de S le vecteur normal $\mathbf{n}_p$ correspondant à l'orientation de S.

(f) Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(g) Déterminer $\mathbf{n}_{\sigma(q)}$ pour tout $q \in U$.

(h) Déterminer les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale $L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(i) Déterminer la courbure de Gauss K_p de S en le point $p = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1)$.

(j) Existe-t-il d'autres points p' dans S avec $K_{p'} = K_p$?

Exercice 3. Soit K un corps algébriquement clos. Soit $F = Y^5 - X^6 \in K[X,Y]$ et soit $V = Z(F) \subseteq K^2$.

(a) Dire pourquoi K^1 est une variété algébrique affine sur K.

(b) Montrer que V est une variété algébrique affine sur K.

(c) Construire un morphisme bijectif $f\colon K^1 \to V$ de variétés algébrique affines sur K.

(d) Montrer que f n'est pas un isomorphisme de variétés algébriques affines sur K.

(e) Le morphisme f induit-il un isomorphisme $f^\star$ du corps des fonctions rationnelles $K(V)$ dans $K(K^1)$?