Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Examen terminal, 1er juillet 2019, 14h00–17h00

L'utilisation des notes de cours et de TD est autorisée ; celle d'appareils électroniques est interdite. Justifier les réponses.

Exercice 1. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée plane de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(t) + t, -\sin(t)).$$

(a) Déterminer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ à γ en t.

(b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles γ n'est pas régulière.

(c) Déterminer le vecteur d'accélération $\gamma''(t)$ de γ en t.

(d) Déterminer la courbure en γ en les points réguliers de γ.

(e) Déterminer le cercle osculateur de γ en $t = \frac{3}{2}\pi$.

Exercice 2. Soit $\gamma\colon]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée gauche de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}t)\cos(2t),\ \cos(-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}t)\sin(2t),\ \sin(-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}t)).$$

(a) Déterminer le vecteur tangent $\gamma'(t)$ à γ en t.

(b) Montrer que γ est régulière.

(c) La paramétrisation γ en est-elle une par longueur d'arc ?

(d) Déterminer la courbure $\kappa(t)$ de γ en t.

(e) Montrer que $\kappa(t) \neq 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit U l'ouvert $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ l'application $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\sigma(u, v) = ((\cos(u) + 2)\cos(v),\ (\cos(u) + 2)\sin(v),\ \tfrac{1}{2}\sin(u))$$

(a) Déterminer la différentielle $D_q\sigma$ de σ en tout point q de U.

(b) Montrer que $D_q\sigma$ est de rang 2 quel que soit $q \in U$.

(c) Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(d) Déterminer $\mathbf{n}_{\sigma(q)}$ pour tout $q \in U$.

(e) Déterminer les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale $L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(f) Déterminer la courbure de Gauss K_p de S en le point $p = \sigma(0, 0)$.

(g) Existe-t-il d'autres points p' dans S avec $K_{p'} = K_p$?