Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

GEOMETRIE ALGEBRIQUE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Examen terminal, 29 mai 2019, 9h00–12h00

L'utilisation des notes de cours et de TD est autorisée ; celle d'appareils électroniques est interdite. Justifier les réponses.

Exercice 1. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée plane de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = ((t^2-1)^2 t, t^2).$$

(a) Montrer que γ est régulière.

(b) Montrer qu'il existe deux nombres réels distincts t_1 et t_2 tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

(c) Déterminer la courbure de γ en t_1 et en t_2.

(d) Déterminer le cercle osculateur de γ en t_1 et en t_2.

Exercice 2. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée gauche de classe $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\gamma(t) = (\cos(\cos(t)), \sin(\cos(t)), \sin(t)).$$

(a) Montrer que γ est une paramétrisation par longueur d'arc.

(b) Déterminer la courbure $\kappa(t)$ de γ en t.

(c) Montrer que $\kappa(t) \neq 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

(d) Déterminer le vecteur normal principal $\mathbf{n}(t)$ de γ en t.

(e) Déterminer le vecteur binormal $\mathbf{b}(t)$ de γ en t.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}z^2.$$

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $S = f^{-1}(1)$.

(a) Montrer que 1 est une valeur régulière de f.

(b) En déduire que S est une surface $\mathcal{C}^\omega$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit U l'ouvert $]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\sigma\colon U \to \mathbb{R}^3$ l'application $\mathcal{C}^\omega$ définie par

$$\sigma(u,v) = (\cos(u)\cos(v)/\sqrt{2}, \sin(u)\cos(v), \sin(v)\sqrt{2}).$$

(c) Montrer que $\mathrm{im}(\sigma) \subseteq S$.

(d) Déterminer la différentielle $D_q\sigma$ de σ en tout point q de U.

(e) Montrer que $D_q\sigma$ est de rang 2 quel que soit $q \in U$.

On admettra que σ est une paramétrisation locale de la surface S faisant partie d'un atlas $\mathcal{C}^\omega$ définissant une orientation sur S. Soit $\mathbf{n}\colon S \to S^2$ l'application qui associe à un point p de S le vecteur normal $\mathbf{n}_p$ correspondant à l'orientation de S.

(f) Déterminer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(g) Déterminer $\mathbf{n}_{\sigma(q)}$ pour tout $q \in U$.

(h) Déterminer les coefficients L, M, N de la seconde forme fondamentale $L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2$ de S sur la carte σ.

(i) Déterminer la courbure de Gauss K_p de S en le point $p = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1)$.

(j) Existe-t-il d'autres points p' dans S avec $K_{p'} = K_p$?