

Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques  
MASTER 1, MATHÉMATIQUES

Groupes et anneaux

Examen terminal 2nd session, 12 juin 2014, 14h00–17h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Question de cours.** Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que le centre d'un  $p$ -groupe non trivial est non trivial.

- Exercice 1.**
- Déterminer tous les  $p$ -sous-groupes de Sylows du groupe alterné  $A_4$ . Dire combien il y en a pour chaque nombre premier  $p$ .
  - Même questions pour le groupe symétrique  $S_4$ .

**Exercice 2.** Soit  $M$  la matrice  $3 \times 4$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  définie par

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -11 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit  $H$  le sous-groupe de  $\mathbb{Z}^3$  engendré par les colonnes de  $M$ , et soit  $G = \mathbb{Z}^3/H$ .

- Déterminer les facteurs invariants de  $M$  à l'aide de l'algorithme de Smith.
- Déterminer le cardinal de  $G$ .

**Exercice 3.** Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Un élément  $a$  de  $A$  est nilpotent s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a^n = 0$ . Soit  $N(A)$  l'ensemble des éléments nilpotents de  $A$ . On dit que  $A$  est réduit si  $N(A) = \{0\}$ .

- Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .
- Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .
- Montrer qu'un anneau intègre est réduit.
- Montrer que le produit cartésien de deux anneaux réduits est réduit.
- Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Montrer que le sous-ensemble  $N(A)$  est un idéal de  $A$ .
- Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Montrer que le quotient  $A/N(A)$  est réduit.

- Exercice 4.**
- Soit  $A$  un anneau principal et  $S \subseteq A^*$  une partie multiplicative. Montrer que la localisation  $S^{-1}A$  de  $A$  est un anneau principal.
  - Dans le question précédente suffit-il que  $S$  est une partie multiplicative de  $A$ ?

**Barème indicatif :**

Question de cours	3 pts
Exercice 1	4 pts
Exercice 2	5 pts
Exercice 3	5 pts
Exercice 4	3 pts