Université de Bretagne Occidentale, Département de Mathématiques
MASTER 1, MATHEMATIQUES

Groupes et anneaux

Examen terminal, 7 janvier 2014, 13h30–16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Formuler le Théorème de la base d'Hilbert et le démontrer.

Exercice 1. Soit A un anneau et soient S et T des parties multiplicatives de A. Soit ST le sous-ensemble de A défini par

$$ST = \{st \mid s \in S \text{ et } t \in T\}.$$

a. Montrer que ST est une partie multiplicative de A.

Soit $\iota\colon A \to S^{-1}A$ la localisation de A par S.

b. Montrer que $\iota(T)$ est une partie multiplicative de l'anneau $S^{-1}A$.

c. Montrer que l'anneau $\iota(T)^{-1}(S^{-1}A)$ est isomorphe à la localisation $(ST)^{-1}A$ de A par ST.

Soit $\kappa\colon A \to T^{-1}A$ la localisation de A par T.

d. Déduire de ce qui précède que les anneaux $\iota(T)^{-1}(S^{-1}A)$ et $\kappa(S)^{-1}(T^{-1}A)$ sont isomorphes.

Exercice 2. Soit G un groupe de cardinal 2014.

a. Décomposer 2014 comme produit de 3 nombres premiers p, q et r, avec $p < q < r$.

Soient s_p, s_q et s_r le nombre de p-, q- et r-sylows de G, respectivement.

b. Montrer que $s_q = 1$.

c. Montrer que $s_r = 1$.

d. Montrer que G contient un unique sous-groupe d'indice p.

e. Montrer que G est isomorphe à l'un des groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/2014\mathbb{Z},\ D_q \times \mathbb{Z}/r\mathbb{Z},\ D_r \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\ D_{qr}.$$

f. Préciser dans chaque cas le nombre s_p de p-sylows de G.

Exercice 3. Soit G le groupe abélien défini par

$$G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

a. Déterminer un morphisme surjectif $f\colon \mathbb{Z}^3 \to G$.

b. Dire pourquoi G est de type fini.

Soit $K = \ker(f)$.

c. Dire pourquoi K est un groupe abélien de type fini, sans utiliser les faits qui suivent.

T. S. V. P.

d. Déterminer une famille génératrice de K de cardinal 2.

e. Déterminer un morphisme surjectif $g\colon \mathbb{Z}^2 \to K$.

f. Quelle est la matrice M de g dans les bases standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{Z}^3$?

g. Effectuer l'algorithme de Smith sur M.

Soient d_1 et d_2 les facteurs invariants de la matrice M.

h. Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{Z}^3$ dans lesquelles la matrice de g est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i. Montrer que le groupe G est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/d_1 \times \mathbb{Z}/d_2 \times \mathbb{Z}$.

Barème indicatif :

Question de cours	6 pts
Exercice 1	4 pts
Exercice 2	5 pts
Exercice 3	5 pts

T. S. V. P.