Application à la réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dim finie

Soit K un corps E un espace vectoriel sur K de dim finie et $u : E \to E$ une application K-linéaire.

On définit une loi de composition externe

$$\begin{aligned} K[X] \times E &\to E \\ (P, v) &\longmapsto P(u)v \end{aligned}$$

où

$$P(u) = a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n \in End(E)$$

si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n \in K[X]$

Prop. E est un $K[X]$-module

Démo.
$$\begin{aligned} P\cdot(v+v') &= P(u)(v+v') \\ &= P(u)v + P(u)v' \\ &= P\cdot v + P\cdot v' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P+Q)\cdot v &= (P+Q)(u)v = \\ &= (P(u)+Q(u))v = \\ &= P(u)v + Q(u)v = P\cdot v + Q\cdot v \end{aligned}$$

$$1\cdot v = 1(u)\cdot v = Id(v) = v$$

$$\begin{aligned} (PQ)\cdot v &= (PQ)(u)v = P(u)\circ Q(u)(v) = \\ &= P(u)(Q(u)v) = P\cdot(Q\cdot v) \quad \square \end{aligned}$$

Réciproquement, soit E un $K[X]$-module. Comme $K \subseteq K[X]$ est un sous-anneau, on obtient une structure de K-module, i.e. K-esp. vect, sur E par restriction

de la loi externe à $K \times E$.
Soit $u : E \to E$ définie par
$$u(v) = X \cdot v$$
Montrons que u est K-linéaire :
$$u(v+v') = X \cdot (v+v') = Xv + Xv'$$
$$= u(v) + u(v')$$
$$u(\lambda v) = X \cdot (\lambda v) = X \cdot (\lambda \cdot v)$$
$$= (X\lambda) \cdot v = (\lambda X) \cdot v$$
$$= \lambda \cdot (X \cdot v) = \lambda\, u(v).$$
Par conséquent, u est un endomorphisme du K-espace vectoriel E.
Il est équivalent de se donner un K-espace vectoriel muni d'endomorphisme et de se donner un $K[X]$-module.

Si E est un K-espace vectoriel de dim. fini et $u : E \to E$ un endomorphisme, que peut-on dire de la structure de $K[X]$-module induite sur E ?
Si $v_1, \dots, v_n$ est une famille génératrice de E comme K-esp. vect. elle est a fortiori génératrice de E comme $K[X]$-module.
En particulier, E est de type fini.
E est donc un module de type fini sur un anneau principal
D'après le Th de classification
$$E \cong K[X]^r \oplus K[X]/(D_1) \oplus \dots \oplus K[X]/(D_\ell)$$
où $D_i \in K[X]$, $D_i \notin K$, $D_i \mid D_{i+1}$

Comme $\dim_K E < \infty$, on a forcément $r = 0$ car $\dim_K K[X] = \infty$. D'où

$$E \cong K[X]/_{(D_1)} \oplus \dots \oplus K[X]/_{(D_\ell)}$$

(isomorphisme de $K[X]$-modules)

Déf. Les polynômes $D_1, \dots, D_\ell$ ci-dessus sont les <u>invariants de similitude</u> de l'endomorphisme u

Rappel. Soit $u : E \to E$ et $v : F \to F$ deux endomorphismes de K-espaces vectoriels de dim finie. u et v sont <u>semblables</u> s'il existe un isomorphisme K-linéaire

$$\varphi : E \to F$$

tel que

$$\varphi^{-1} \circ v \circ \varphi = u$$

<u>Théorème</u> : Soient $u : E \to E$ et $v : F \to F$ des endomorphismes de K-espaces vectoriels de dim finie. Soient $D_1, \dots, D_\ell$ les invariants de similitude de u et $E_1, \dots, E_m$ ceux de v. Alors u et v sont semblables ssi $\ell = m$ et

$$E_i = \lambda_i D_i \quad \text{où } \lambda_i \in K^*, \; i = 1, \dots, \ell$$

<u>Démo.</u> C'est une conséquence immédiate de la classification des modules de type fini sur $K[X]$ ∎

<u>Exemple.</u> $K = \mathbb{Q}$. $E = K^2$ et $u : K^2 \to K^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Considérons $\mathbb{Q}^2$ comme $\mathbb{Q}[X]$-module en définissant

$$P \cdot v = P(u)v \in \mathbb{Q}^2 \qquad P \in \mathbb{Q}[X]$$
$$v \in \mathbb{Q}^2.$$

Déterminons les invariants de similitude de u c-à-d, les facteurs invariants du $\mathbb{Q}[X]$-module $\mathbb{Q}^2$ qu'on vient d'obtenir.

Soit
$$f : \mathbb{Q}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$$
$$(P,Q) \longmapsto P \cdot e_1 + Q \cdot e_2$$

f est $\mathbb{Q}[X]$-linéaire et surjective

$\ker(f) = ?$

$$f(X,0) = X \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = u(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 = f(2,1)$$

Autrement dit $\quad f(X-2,-1) = 0$

De même $\quad f(-1, X-2) = 0$

En fait
$$\ker(f) = \big((X-2,-1),(-1,X-2)\big) = N$$

En effet, $\supseteq$ est claire.

Pour démontrer $\subseteq$ on quotiente $\mathbb{Q}[X]^3$ par N. Dans $\mathbb{Q}[X]^2/N$ on a

$$\overline{0} = \overline{(X-2,-1)} = \overline{(X,0)-(2,1)} =$$
$$= \overline{(X,0)} - \overline{(2,1)} \Rightarrow \overline{(X,0)} = \overline{(2,1)}$$

De même, $\overline{(0,X)} = \overline{(1,2)}$

Du coup, si $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$
$$\overline{(P,Q)} = \overline{(P,0)} + \overline{(0,Q)} = \overline{(a,b)}$$
avec $a, b \in \mathbb{Q}$

Donc $\mathbb{Q}[X]^2/_M$ est engendré comme $\mathbb{Q}$-esp vect. par $\overline{(1,0)}$ et $\overline{(0,1)}$
En particulier, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]^2/_M \leq 2$.
Or $M \subseteq \ker f$, donc f induit f induit un morphism de $\mathbb{Q}[X]$-module

$$\overline{f} : \mathbb{Q}[X]^2/_M \longrightarrow \mathbb{Q}^2$$

Comme f est surjectif, $\overline{f}$ est surjectif. Comme $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]^2/_M \leq 2$,
Du coup $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[X]^2/_M = 2$
et $\overline{f}$ est bijective. En particulier $\overline{f}$ est injective et donc $M = \ker(f)$
Par conséquent

$$\ker(f) = \left(\begin{pmatrix} X-2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ X-2 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{Q}[X]^2$$

Soit

$$a = \begin{pmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q}[X])$$

$X \cdot I_2 - u$!

On pourrait appliquer l'algorithm de Smith mais puisqu'on ne veut que déterminer les invariants de similitude de u on peut les trouver directement en sachant que les facteurs invariants de a sont

$$(d_1) = (X-2, -1, -1, X-2) = \mathbb{Q}[X]$$

c-à-d $d_1 \in \mathbb{Q}^\times$

$$(d_1 d_2) = (\det(XI - u)) = (X^2 - 4X + 3)$$

i.e. on peut prendre $d_2 = X^2 - 4X + 3$

c'est le polynôme caractéristique de u !
u possède qu'un seul invariant de similitude à savoir $X^2-4X+3 = D_1$

<u>Exemple</u> $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$
Quels invariants de similitude ?

$$a = XI_2 - u = \begin{pmatrix} X-1 & 0 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

Comme $X-1 \mid X-1$ dans $\mathbb{Q}[X]$, l'algorithme de Smith est tout de suite terminé. Les invariants de similitude de u sont donc $X-1$, $X-1$. (il y en a deux)

<u>Exemple</u> $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$a = XI_2 - u = \begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

Les invariants de similitude de u sont : $(X-1)^2$ (un seul)

<u>Exo.</u> $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Quels invariants de similitude ?

On va montrer que le dernier invariant de similitude d'un endomorphisme est son polynôme minimal.
Pour cela, on aura besoin de la notion suivante.

<u>Déf.</u> Soit A un anneau et M un A-module. L'<u>annihilateur</u> de M est le sous-ensemble de A défini par

$$\mathrm{ann}(M) = \{ a \in A \mid \forall m \in M \; a.m = 0 \}$$

<u>Prop.</u> $\mathrm{ann}(M)$ est un idéal de A (exo)

Exemples.

1) $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/_2 \oplus \mathbb{Z}/_4 \oplus \mathbb{Z}/_3 \oplus \mathbb{Z}/_6$

$\operatorname{ann}(M) = 12\mathbb{Z}$.

2) $M = A^n$, $n \neq 0$ $\operatorname{ann}(M) = (0)$

plus généralement, si M de t.f. sur A intègre et rang $M \neq 0$, alors $\operatorname{ann}(M) = (0)$

3) $M = A/_{(d_1)} \oplus \dots \oplus A/_{(d_\ell)}$

A principal, $d_i \mid d_{i+1}$

$\operatorname{ann}(M) = (d_\ell)$

Prop. Soit E un K-esp vect. de dim finie et $u : E \to E$ un endomorphisme. Soient $D_1, \dots, D_\ell \in K[X]$ les invariants de similitude de u. Alors

$$\operatorname{ann}_{K[X]}(E) = (D_\ell)$$

En particulier, D_ℓ est le polynôme minimal de u

Démo. $E \underset{K[X]}{\simeq} A/_{(D_1)} \oplus \dots \oplus A/_{(D_\ell)}$

où $D_i \mid D_{i+1}$, $D_i \in K[X]$

Du coup

$$\operatorname{ann}_{K[X]}(E) = \operatorname{ann}_{K[X]}(A/_{D_1} \oplus \dots \oplus A/_{D_\ell})$$
$$= (D_\ell)$$

Comme $\operatorname{ann}_{K[X]}(E) = \{P \in K[X] \mid \forall v \in E : P.v = 0\}$

$$= \{P \in K[X] \mid \forall v \in E \ P(u)v = 0\}$$
$$= \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\} \subseteq K[X]$$

qui est engendré par le polynôme minimal de u par définition. $\square$

Théorème (Cayley - Hamilton)
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dim finie.
Soit $\det(X\mathrm{id} - u) = P(X)$ son polynôme caractéristique. Alors $P(u) = 0$.

Démo. On peut supposer que $E = K^n$ et que $u \in M_{n\times n}(K)$.
Comme on a vu ci-dessus les invariants de similitude de u sont les facteurs invariants non inversibles de la matrice caractéristique de u :

$$a = XI_n - u \in M_{n\times n}(K[X])$$

Soient $d_1, \ldots, d_n$ les facteurs invariants de a. On a

$$d_1 \cdots d_n = \det(a) = P(X)$$

Soient $D_1, \ldots, D_\ell$ les invariants de similitude de u, i.e., $D_1 = d_{n-\ell+1}, \ldots, D_\ell = d_n$ et $d_1, \ldots, d_{n-\ell} \in K[X]^\times = K^*$
Comme $d_n(u) = 0$ (car d_n est le polynôme minimal de u), on a

$$P(u) = (d_1 \cdots d_n)(u) = d_1(u) \cdots d_n(u) = 0 \quad \square$$

De même, on peut facilement montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si son polynôme minimal est scindé sur K et est à racines simples (c'est le Th. chinois!)

Exemple : $K = \mathbb{Q}$

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

Déterminer les invariants de similitude de u.

$a = XI_3 - u$ et on effectue l'algo de Smith pour obtenir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3 - 6X^2 + 10X - 4 \end{pmatrix}$$

$D_1 = X^3 - 6X^2 + 10X - 4$ diagonalisable.

<u>Exemple</u> $K = \mathbb{Q}$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les invariants de similitude de u :

X — X^2 non diagonalisable !