Exemples :

2) $\{2,3\}$ est un sous-ensemble générateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^1$ dont on ne peut extraire une base de $\mathbb{Z}^1$.

3) $\{2\}$ est libre mais ne peut être complété en une base de $\mathbb{Z}^1$.

4) Toute famille non vide du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est liée. En effet, pour tout $m \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $6 \cdot m = \bar{0}$ et $6 \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$

Déf. Soit A un anneau et M un A-module. M est libre s'il possède une base. M est libre de rang fini si M possède une base finie.

Ex. 1) A^n est libre de rang fini, comme A-module

2) $A[X]$ est libre comme A-module : $1, X, X^2, X^3, \ldots$ en est une base

3) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre. Par contre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est libre en tant que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-mod.

4) si A est un corps, tout A-module possède une base

Déf. Soit M un A-module. M est de type fini si M possède une famille génératrice finie.

Exemple. 1) A^n est de type fini comme A-module

2) si A est un corps, un A-module est de type fini ssi c'est un A-esp. vect. de dim. finie.

3) le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini (exo.)

Prop. Si $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme surjectif de A-modules avec M de type fini, alors N est de type fini.

Démo. C'est une conséquence directe de la formule
$$(f(S)) = f((S))$$
où $S \subseteq M$ ∎

Pour la notion duale de morphisme injectif, la situation est plus compliquée :

Un sous-module d'un module de type fini n'est pas nécessairement de type fini.
Exemple : $A = K[X_1, X_2, X_3, \dots]$, K un corps et $I = (X_1, X_2, X_3, \dots)$. $A^1 = A$ est A-module de type fini car $A^1 = (1)$. I est un sous-A-module de A non de type fini comme A-module.

Prop. Soit A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Alors, tout sous-A-module de M est de type fini.

Dém. Il suffit de démontrer la proposition pour $M = A^n$. En effet, soit $N \subseteq M$ un sous-module dont on veut montrer qu'il est de type fini. Comme M est de type fini, M possède une famille génératrice finie $x_1, \dots, x_n \in M$ où $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$f : A^n \longrightarrow M$$
$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Alors f est un morphisme de A-modules. Si l'énoncé est vrai pour A^n, le sous-A-module $f^{-1}(N)$ de A^n est de type fini. Du coup aussi $f(f^{-1}(N)) = N$ est de type fini.

Montrons l'énoncé pour $M = A^n$. Par récurrence. Pour $n = 0$, $A^n = \{0\}$ et tout sous-module de $\{0\}$ est bien de type fini. Supposons l'énoncé vrai au rang n. Soit N un sous-module de A^{n+1}. Soit

$$p : A^{n+1} \longrightarrow A^n$$
$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \longmapsto (a_1, \dots, a_n)$$

la projection. C'est un morphisme de A-modules. $p(N)$ est un sous-module de A^n. Par hypothèse de récurrence, il est de type fini. Il existe $t_1, \dots, t_k \in N$ tq.

$$(p(t_1), \dots, p(t_k)) = p(N)$$

En identifiant $\ker p = \{0\}^n \times A$ avec A, $N \cap \ker(p)$ est un sous-module de A, i.e. c'est un idéal de A. Comme A est noethérien, $N \cap \ker(p)$ est de type fini.

Il existe donc $t_{k+1}, \dots, t_\ell \in M \cap \ker(p)$ tq

$$(t_{k+1}, \dots, t_\ell) = M \cap \ker(p)$$

Il est facile de montrer que

$$(t_1, \dots, t_\ell) = M. \qquad \square$$

Déf. Soit N un sous-A-module de M. On définit une loi externe sur le groupe abélien quotient M/N

$$a \cdot \overline{m} = \overline{am}$$

pour tout $a \in A$ et tout $m \in M$. Cette loi est bien définie et M/N est un A-module. C'est le module quotient de M par N. Le morphisme quotient

$$\pi : M \longrightarrow M/N$$

est automatiquement un morphisme de A-modules

Il y plusieurs façons de construire des sous-modules d'un module donné : le sous-module engendré (S) où $S \subseteq M$ est un sous-ensemble. Une autre façon est la suivante, si $I \subseteq A$ est un idéal et M un A-module, le sous ensemble

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \;\middle|\; x_i \in I,\ m_i \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

de M est un sous-A-module de M

Prop. La loi externe

$$A/I \times M/IM \longrightarrow M/IM$$

définie par

$$\overline{a} \cdot \overline{m} = \overline{am}$$

est bien définie et M/IM est un A/I-module

Dém. On a déjà vu que M/IM est A-module sous la loi externe

$$A \times M/IM \longrightarrow M/IM$$

définie par $a \cdot \overline{m} = \overline{am}$.

On doit donc démontrer que $\overline{am}$ ne dépend pas de a mais seulement de sa classe $\overline{a}$ dans A/I. Soit $b \in A$ tq. $\overline{a} = \overline{b}$; c-à-d, $a - b \in I$. Du coup

$$(a-b)m \in IM$$

Du coup, on a dans M/IM

$$0 = \overline{(a-b)m} = \overline{am - bm} = \overline{am} - \overline{bm}$$

D'où

$$\overline{am} = \overline{bm}$$

et la loi externe $A/I \times M/IM \to M/IM$ est bien définie. Comme M/IM est déjà un A-module, cette nouvelle loi externe donne automatiquement lieu à la structure d'un A/I-module sur M/IM. $\square$

Une application de cette construction est l'énoncé suivant.

Prop : Soit A un anneau non nul.
Si les A-modules A^r et A^s sont isomorphes alors $r=s$.

Démo. Soit $f : A^r \to A^s$ un morphisme bijectif de A-modules. Comme A est un anneau non nul, il existe un idéal maximal $m \subseteq A$. Comme f est A-linéaire

$$f(mA^r) \subseteq mA^s.$$

(De manière générale, si $f : M \to N$ morphisme de modules et $I \subseteq A$ idéal, alors $f(IM) \subseteq IN$. De plus, le morphisme de grp induit $\overline{f} : M/IM \to N/IN$ est automatiquement un morphisme de A/I-modules)
et le morphisme induit

$$\overline{f} : A^r/mA^r \longrightarrow A^s/mA^s$$

est un morphisme A/m-espaces vectoriels.
En fait,

$$\overline{f}(\overline{v}) = \overline{f(v)} \qquad v \in A^r$$

Comme f est un isomorphisme, il existe un morphisme de A-module

$$g : A^s \longrightarrow A^r$$

tq. $f \circ g = id$ et $g \circ f = id$
De même, g induit une application A/m-linéaire

$$\overline{g} : A^s/mA^s \longrightarrow A^r/mA^r$$

On a $\overline{f} \circ \overline{g} = id$ et $\overline{g}\,\overline{f} = id$. Du coup $\overline{f}$ est un isomorphisme de A/m-espaces vectoriels.

Or

$$A^r/_{\mathfrak{m}A^r} = A^r/_{\mathfrak{m}^r} \cong (A/_{\mathfrak{m}})^r$$

comme $A/_{\mathfrak{m}}$-espaces vectoriels. D'après l'algèbre linéaire, $r = s$. ▫

<u>Déf.</u> Soit A un anneau non nul.
Soit M un A-module libre de rang fini. D'après la prop précédent, il y a un et un seul entier naturel n tq $M \cong A^n$ comme A-modules. On appelle n le <u>rang</u> du A-module M.

Lorsque A est intègre, on a vu la construction du corps $\mathrm{Frac}(A)$ des fractions de A. On verra qu'un A-module donnera lieu à un espace vectoriel sur le corps $\mathrm{Frac}(A)$.

Soit M un A-module, où A est intègre. Rappelons que

$$K = \mathrm{Frac}(A) = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in A^* \right\}$$

Si on note $S = A^*$, introduisons de manière similaire une relation d'équivalence $\sim$ sur $M \times S$:

$$(m,s) \sim (n,t) \iff tm = sn$$

On note M_K le quotient $(M \times S)/_\sim$ et on note

$$\frac{m}{s} = \overline{(m,s)}$$

Définissons

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}$$

et

$$\frac{a}{r} \cdot \frac{m}{s} = \frac{am}{rs}$$

pour $\frac{m}{s}, \frac{n}{t} \in M_K$ et $\frac{a}{r} \in K = \mathrm{Frac}(A)$.

<u>Prop.</u> M_K est un K-espace vectoriel

<u>Démo.</u> (exo)

<u>Exemple.</u> 1) $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

$$(\mathbb{Z}^n)_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n$$

2) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} = \{0\}$

En effet,
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} = \left\{ \frac{\bar{0}}{s}, \frac{\bar{1}}{s} \mid s \in \mathbb{Z}^* \right\}$$
Évidemment, $\frac{\bar{0}}{s} = \frac{\bar{0}}{1} = 0$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$

Mais on a aussi $\frac{\bar{1}}{s} = \frac{\bar{0}}{1}$ car
$$\frac{\bar{1}}{s} = \underset{\underset{\mathbb{Q}}{\cap}}{1} \cdot \frac{\bar{1}}{s} = \left(\tfrac{1}{2} \times 2\right) \cdot \frac{\bar{1}}{s} = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{\bar{1}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{1}}{s} + \frac{\bar{1}}{s}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{2}}{s} = \frac{1}{2}\frac{\bar{0}}{s} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Soit M un A-module, A-intègre, $K = \mathrm{Frac}(A)$

On a une application de <u>localisation</u>
$$\begin{aligned} \iota : M &\longrightarrow M_K \\ m &\longmapsto \frac{m}{1} \end{aligned}$$
En restreignant la loi externe de M_K à A, M_K est en particulier un A-module et ι est morphisme de A-modules.

<u>Ex.</u> $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}^n$, $M_K = \mathbb{Q}^n$ et $\iota : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Q}^n$ est l'inclusion.

Si $f : M \to N$ morphisme de A-modules, on a une application K-linéaire induite
$$\begin{aligned} f_K : M_K &\longrightarrow N_K \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{f(m)}{s} \end{aligned}$$
On a $(f \circ g)_K = f_K \circ g_K$.

<u>Déf.</u> Soit A un anneau intègre, K son corps de fractions. Soit M un A-module de type fini. Alors M_K est un K-esp vect. de dim finie. On définit le <u>rang de</u> M par
$$\mathrm{rang}(M) = \dim(M_K)$$
<u>Ex</u> 1) $(A^n)_K = K^n$ D'où
$$\mathrm{rang}(A^n) = \dim_K K^n = n.$$