Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
MASTER 1 DE MATHEMATIQUES

ALGEBRE

Examen terminal, 8 janvier 2018, 9h00–12h00

L'utilisation des documents est autorisée ; celle d'appareils électroniques interdite.

Exercice 1. Déterminer un entier n tel que la localisation $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})_{10}$ par 10 de l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ soit isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $A = \mathbb{Q}[X^2, X^3]$ le sous-anneau de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ obtenu à partir du sous-anneau $\mathbb{Q}$ en adjoignant les éléments X^2 et X^3. Le but de cet exercice est de montrer, entre autres, que l'anneau A n'est pas factoriel.

(a) Montrer que l'anneau A est intègre.

(b) Montrer que A est égal au sous-ensemble de $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes dont le coefficient du monôme X est égal à 0. Plus précisément, montrer que

$$A = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N},\ \text{avec } a_1 = 0\}.$$

(c) Déterminer le groupe multiplicatif $A^\times$ de A.

(d) Montrer que l'élément X^2 de A est un élément irréductible de A.

(e) Montrer que l'élément X^2 de A n'est pas un élément premier de A.

(f) En déduire que l'anneau A n'est pas factoriel.

(g) Montrer que tout élément non nul de A s'écrit comme un produit d'irréductibles de A et d'un inversible de A. (On dira que tout élément non nul de A possède une décomposition en irréductibles.)

(h) Montrer que X^3 est irréductible dans A.

(i) Montrer que les irréductibles X^2 et X^3 de A ne sont pas associés.

(j) Montrer par un exemple que la décomposition en irréductibles dans A n'est pas unique au sens habituel.

(k) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Montrer qu'il existe un élément f de A qui possède au moins n décompositions en irréductibles distinctes dans A, au sens habituel.

Soit A_{X^2} la localisation de A par X^2, c-à-d, $A_{X^2} = S^{-1}A$ où $S = \{1, X^2, X^4, \ldots\}$. De même, soit $\mathbb{Q}[X]_X$ la localisation de $\mathbb{Q}[X]$ par X, c-à-d, $\mathbb{Q}[X]_X = T^{-1}\mathbb{Q}[X]$ où $T = \{1, X, X^2, \ldots\}$. On considérera A_{X^2} et $\mathbb{Q}[X]_X$ comme sous-anneaux du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(X)$.

(l) Montrer que $A_{X^2} = \mathbb{Q}[X]_X$.

(m) En déduire que la localisation A_{X^2} de A est factoriel.

Exercice 3. Soit f le polynôme homogène symétrique dans $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ défini par

$$f = X_1^3X_2^2 + X_1^3X_3^2 + X_1^2X_2^3 + X_1^2X_3^3 + X_2^3X_3^2 + X_2^2X_3^3.$$

Déterminer un polynôme $g \in \mathbb{Z}[Y_1, Y_2, Y_3]$ tel que

$$f = g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les polynômes symétriques élémentaires dans $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$.

Exercice 4. Soit A un anneau et $f \in A[T]$ unitaire. Montrer que

$$\Delta(Tf) = f(0)^2\Delta(f)$$

dans A, où Δ désigne le discriminant. (Indication : on pourra montrer cette égalité dans une algèbre de décomposition de f sur A.)

Exercice 5. Pour un entier naturel non nul n, notons K_n le sous-corps $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ de $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\sqrt[n]{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

(b) Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt[n]{2}$ sur $\mathbb{Q}$.

(c) Déterminer le degré de l'extension $K_n/\mathbb{Q}$.

(d) Montrer que $K_m \subseteq K_n$ si et seulement si m divise n.

(e) Déterminer le degré $[K_n : K_m]$ lorsque $K_m \subseteq K_n$.

Dans la suite de cet exercice, on s'intéresse à l'extension $K_6 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ de $\mathbb{Q}$. Soit ξ la racine sextique primitive de 1 définie par $\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ dans $\mathbb{C}$. Soit

$$z_i = \xi^i \sqrt[6]{2}$$

pour $i = 1, \ldots, 6$.

(f) Montrer que $K_6(\xi)$ est la clôture normale de $K_6/\mathbb{Q}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$.

(g) Déterminer $[K_6(\xi) : \mathbb{Q}]$.

(h) Montrer qu'il existe un automorphisme σ de $K_6(\xi)/\mathbb{Q}$ tel que

$$\sigma(z_i) = z_{\pi(i)},$$

quel que soit $i = 1, \ldots, 6$, où π est la permutation $(1\,5)(2\,4)$ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(i) Montrer qu'il existe un automorphisme ρ de $K_6(\xi)/\mathbb{Q}$ tel que

$$\rho(z_i) = z_{\omega(i)},$$

quel que soit $i = 1, \ldots, 6$, où ω est la permutation $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$ de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(j) En déduire que le groupe de Galois de $K_6(\xi)/\mathbb{Q}$ est isomorphe au groupe diédral D_6.

Barème indicatif sur 100 points :

Exercice 1	8 pts
Exercice 2	30 pts
Exercice 3	18 pts
Exercice 4	14 pts
Exercice 5	30 pts