Théorie homotopique à la Quillen - cours de M2 de niveau 2 - 2016/2017

La théorie homotopique de Quillen [7], de nos jours connue sous le nom de théorie de catégories de modèles [1, 3], permet d'étudier la localisation d'une catégorie. Elle s'est inspirée de la topologie algébrique, notamment de l'étude d'espaces topologiques à équivalence homotopique faible près [2], et en englobe d'autres comme celle des catégories dérivées de catégories abéliennes [9], ou encore celle de la géométrie dérivée, qu'elle soit algébrique [4] ou pas [8], pour en citer quelques unes.

Le but de ce cours est d'expliquer cette théorie homotopique et de démontrer le théorème fondamental de Quillen qui stipule que la localisation d'une catégorie de modèles relativement à ses équivalences faibles, ce que Quillen appelle la catégorie homotopique, est équivalente à la sous-catégorie dont les objets sont fibrants et cofibrants à la fois. C'est la généralisation du fait que la catégorie des espaces topologiques à équivalence homotopique faible près est équivalente à la catégorie des complexes cellulaires à homotopie près.

On commencera par rappeler la théorie homotopique des espaces topologiques, et notamment des complexes cellulaires [2]. Puis, on étudiera la théorie homotopique de Quillen. Ensuite on montrera comment la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne peut être vue comme la catégorie homotopique des complexes de cette catégorie abélienne. Si le temps le permet, on rappelera la théorie des ensembles simpliciaux [6], et on montrera que la catégorie homotopique de Quillen est naturellement une ∞-catégorie [5].

Références

[1] W. G. Dwyer et J. Spaliński. "Homotopy theories and model categories". In : *Handbook of algebraic topology.* North-Holland, Amsterdam, 1995, p. 73–126. doi : 10.1016/B978-044481779-2/50003-1. url : http://dx.doi.org/10.1016/B978-044481779-2/50003-1.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002, p. xii+544. url : https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf.

[3] Mark Hovey. *Model categories.* T. 63. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, p. xii+209. isbn : 0-8218-1359-5.

[4] Jacob Lurie. *Derived algebraic geometry.* Thesis (Ph.D.)–Massachusetts Institute of Technology. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2004, (no paging). url : http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:0806251.

[5] Jacob LURIE. *Higher topos theory*. T. 170. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009, p. xviii+925. DOI : `10.1515/9781400830558`. URL : `http://dx.doi.org/10.1515/9781400830558`.

[6] J. Peter MAY. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. Reprint of the 1967 original. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992, p. viii+161. ISBN : 0-226-51181-2.

[7] Daniel G. QUILLEN. *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967, iv+156 pp. (not consecutively paged).

[8] David I. SPIVAK. “Derived smooth manifolds”. In : *Duke Math. J.* 153.1 (2010), p. 55–128. ISSN : 0012-7094. DOI : `10.1215/00127094-2010-021`. URL : `http://dx.doi.org/10.1215/00127094-2010-021`.

[9] Jean-Louis VERDIER. “Des catégories dérivées des catégories abéliennes”. In : *Astérisque* 239 (1996). With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis, xii+253 pp. (1997). ISSN : 0303-1179.

JOHANNES HUISMAN, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE BRETAGNE ATLANTIQUE CNRS UMR 6205, UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE, 6 AVENUE VICTOR LE GORGEU, CS 93837, 29238 BREST CEDEX 3, FRANCE