

ALGEBRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

Contrôle continu, le 20 décembre 2002

CORRIGE et EXPLICATIONS

1. Faux. Soit G le sous-groupe $\{\text{id}, (1, 2)\}$ de $G' = S_3$. L'inclusion $i: G \rightarrow G'$ est un morphisme injectif, et le sous-groupe $H = G$ de G est distingué dans G , mais $i(H) = G$ n'est pas distingué dans G' .
2. Faux. Comme $72 = 2^3 \times 3^2$, le nombre de diviseurs de l'entier 72 est égal à $4 \times 3 = 12$. Donc $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ a exactement 12 sous-groupes.
3. Faux. les sous-groupes $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} ne sont pas comparables.
4. Faux. Soit H le sous-groupe $\{(0, 0), (1, 1)\}$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On voit tout de suite que H n'est pas de la forme $H_1 \times H_2$, même ensemblistement.
5. Faux. Soit $N = S_3$. Comme N n'est pas commutatif, tout produit semi-direct de la forme $N \rtimes_{\varphi} H$ n'est pas commutatif, quels que soient H et φ .