Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 2 mai 2019, 13h30-14h00

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Rappelons que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ est le groupe multiplicatif des matrices inversibles 2×2 à coefficients dans le corps à 3 éléments*. Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ et H le sous-ensemble de G des matrices de la forme λI, où $\lambda \in \mathbb{F}_3^\times$ et I est la matrice identité dans G. Soient $A, B \in G$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que l'ordre de A est égal à 8.
b. Montrer que H est un sous-groupe de G.
c. Montrer que H est distingué dans G.
d. Montrer que l'ordre du groupe quotient G/H est égal à 24.
e. Déterminer l'ordre de la classe $\bar{A}$ de A dans le groupe quotient G/H.

Rappelons que les droites vectorielles dans $\mathbb{F}_3^2$ sont

$$L_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), L_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ L_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ L_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Si M est une matrice dans G, on note ML_i la droite vectorielle de $\mathbb{F}_3^2$ obtenue en multipliant les éléments de L_i par M. Il existe donc un unique entier $\sigma_M(i)$ dans $\{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$ML_i = L_{\sigma_M(i)}.$$

Cela définit donc, pour toute matrice $M \in G$, une application ensembliste σ_M de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même. Il est évident que $\sigma_I = \mathrm{id}$, et il est facile de voir que $\sigma_{MN} = \sigma_M \circ \sigma_N$ quels que soient $M, N \in G$. Il suit donc que $\sigma_M \in S_4$ et que

$$\begin{aligned} \sigma \colon G &\to S_4 \\ M &\mapsto \sigma_M \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

f. Déterminer les permutations σ_A et σ_B dans S_4.
g. Montrer que $\ker(\sigma) = H$.
h. En déduire que σ induit un isomorphisme $\bar{\sigma}$ de G/H sur S_4.
i. Montrer que $G/H = \langle \bar{A}, \bar{B} \rangle$.
j. En déduire que $G = \langle A, B \rangle$.

*. Il est conseillé de travailler avec les représentants 0 et ± 1 des éléments de $\mathbb{F}_3$.