Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 14 mars 2019, 10h15-10h45

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. La décomposition de la permutation σ en cycles disjoints est

$$\sigma = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7).$$

L'ordre de σ est donc égal au $\mathrm{ppcm}(4,3) = 12$. **(1 pt)**

b. Comme σ est d'ordre 12, on a

$$\langle\sigma\rangle = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{11}\}.$$

De plus, cette liste d'éléments de S_7 est sans répétition d'après le cours. **(1 pt)**

c. Comme la décomposition de σ ci-dessus est en cycles disjoints, on a

$$\sigma^3 = (1\,2\,3\,4)^3(5\,6\,7)^3 = (1\,4\,3\,2).$$

Comme $\tau = (2\,4)$, on a donc

$$\tau\sigma^3 = (2\,4)(1\,4\,3\,2) = (1\,2)(3\,4)$$

et

$$\sigma^{-3}\tau = (2\,3\,4\,1)(2\,4) = (1\,2)(3\,4),$$

ce qui montre que $\tau\sigma^3 = \sigma^{-3}\tau$. **(1 pt)**

d. De même, on a

$$\sigma^4 = (1\,2\,3\,4)^4(5\,6\,7)^4 = (5\,6\,7).$$

Comme σ^4 et τ sont à supports disjoints, σ^4 et τ commutent. **(1 pt)**

e. En appliquant le c m fois, on a $\tau\sigma^{3m} = \sigma^{-3m}\tau$ quel que soit $m \in \mathbb{N}^\star$. En multipliant par τ à gauche et à droite et en utilisant que $\tau^2 = \mathrm{id}$, on obtient $\sigma^{3m}\tau = \tau\sigma^{-3m}$ quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Du coup,

$$\tau\sigma^{3(-m)} = \tau\sigma^{-3m} = \sigma^{3m}\tau = \sigma^{-3(-m)}\tau,$$

ce qui montre que $\tau\sigma^{3m} = \sigma^{-3m}\tau$ pour $m < 0$. Il s'ensuit que $\tau\sigma^{3m} = \sigma^{-3m}\tau$ quel que soit $m \in \mathbb{Z}$ car c'est trivialement vrai lorsque $m = 0$.

Comme σ^4 commute avec τ, toute puissance positive σ^{4n} de σ^4 commute avec τ. D'où $\tau\sigma^{4n} = \sigma^{4n}\tau$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. En multipliant à droite et à gauche par σ^{-4n}, on obtient $\sigma^{-4n}\tau = \tau\sigma^{-4n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Du coup, $\tau\sigma^{4(-n)} = \sigma^{4(-n)}\tau$ ce qui montre que $\tau\sigma^{4n} = \sigma^{4n}\tau$ pour tout $n \leq 0$. Il s'ensuit que $\tau\sigma^{4n} = \sigma^{4n}\tau$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$.

Les deux derniers paragraphes pris ensemble donnent

$$\tau\sigma^{3m+4n} = \tau\sigma^{3m}\sigma^{4n} = \sigma^{-3m}\tau\sigma^{4n} = \sigma^{-3m}\sigma^{4n}\tau = \sigma^{-3m+4n}\tau$$

quels que soient $m, n \in \mathbb{Z}$. **(2 pt)**

f. Tout élément de $\langle\sigma, \tau\rangle$ s'écrit sous la forme

$$\sigma^{m_1}\tau^{n_1}\sigma^{m_2}\tau^{n_2}\cdots\sigma^{m_k}\tau^{n_k}$$

où $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Compte tenu du fait que $\tau^2 = 1$, on peut supposer que les n_i sont égaux à 0 ou 1. Il suit du e que $\tau\sigma^{m_i} = \sigma^{m'_i}\tau$ pour un certain $m'_i \in \mathbb{Z}$ car 3 et 4 sont premiers entre eux. Du coup, tout élément de $\langle\sigma, \tau\rangle$ s'écrit sous la forme $\sigma^i\tau^j$ avec $i, j \in \mathbb{Z}$. **(1 pt)**

g. Non. Si τ y appartenait, τ commuterait avec σ^3. Or, d'après le c, τ ne commute pas avec σ^3 car $\sigma^{-3} \neq \sigma^3$. **(1 pt)**

h. D'après le f,

$$\langle\sigma, \tau\rangle = \langle\sigma\rangle \cup \langle\sigma\rangle\tau. \quad \textbf{(1 pt)}$$

D'après le b, le sous-ensemble $\langle\sigma\rangle$ contient 12 éléments. D'après le cours, son translaté $\langle\sigma\rangle\tau$ en contient 12 également. Montrons que les deux sous-ensembles sont disjoints. Par l'absurde, si

$$x \in \langle\sigma\rangle \cap \langle\sigma\rangle\tau,$$

on a $x = \sigma^i = \sigma^j\tau$ pour certains $i, j \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\tau = \sigma^{i-j}$ ce qui contredit le g. Cela montre bien que les deux sous-ensembles sont disjoints. Du coup, le cardinal du sous-ensemble $\langle\sigma, \tau\rangle$ est égal à 24. **(1 pt)**