Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

GROUPES ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 9 mai 2018, 8h00-11h00

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Rappelons que le groupe alterné A_4 est le sous-groupe de S_4 des permutations paires.

a. Déterminer les types de permutations appartenant à A_4.

b. En déduire les ordres d'éléments de A_4.

Dans la suite on considère l'action par conjugaison de A_4 sur lui-même, action qu'on notera $\star$. Rappelons que deux éléments conjugués d'un groupe ont même ordre. Soit τ la double transposition $(1\,2)(3\,4)$, et σ la permutation $(1\,2\,3)$ de A_4.

c. Calculer le conjugué $(1\,2\,3) \star \tau = (1\,2\,3) \cdot \tau \cdot (1\,2\,3)^{-1}$ de τ.

d. En déduire que l'orbite $A_4 \star \tau$ de τ est de cardinal au moins 3.

e. En déduire que tous les éléments d'ordre 2 de A_4 sont conjugués dans A_4.

f. Montrer que σ appartient au stabilisateur $(A_4)_\sigma$ de σ pour l'action de A_4 sur lui-même par conjugaison.

g. En déduire que l'ordre du groupe $(A_4)_\sigma$ est un multiple de 3 supérieur ou égal à 3.

h. En déduire que σ possède au plus 4 conjugués dans A_4.

i. Calculer le conjugué $(1\,2\,4) \star \sigma = (1\,2\,4) \cdot \sigma \cdot (1\,2\,4)^{-1}$ de σ dans A_4.

j. En déduire que σ possède au moins 3 conjugués dans A_4.

k. Déduire des questions g et j que σ possède exactement 4 conjugués dans A_4.

l. Déterminer l'ensemble quotient $A_4/(A_4)_\sigma$ du groupe A_4 par le sous-groupe $(A_4)_\sigma$ agissant sur A_4 par translations à droite.

m. En déduire les conjugués de σ dans A_4.

Soit α l'automorphisme de S_4 défini par $\alpha(\gamma) = (1\,2)\gamma(1\,2)^{-1}$.

n. Montrer que $\alpha(A_4) = A_4$, et que la restriction β de α à A_4 est un automorphisme de A_4.

o. Déduire des questions k et n que la permutation $\sigma' = (2\,1\,3)$ de A_4 possède également 4 conjugués dans A_4.

p. En déduire que l'ensemble des éléments de A_4 d'ordre 3 est la réunion disjointe de deux classes de conjugaison.

q. Déduire, des questions b, e et p, les classes de conjugaison de A_4 et le cardinal de chacune.

Rappelons qu'un sous-groupe d'un groupe G est distingué si et seulement s'il est réunion de classes de conjugaison de G.

r. Déduire de la question q que le seul sous-groupe distingué non trivial de A_4 est le sous-groupe “des doubles transpositions”

$$\{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

Exercice 2. Soit G un groupe. Rappelons que le centre de G est le sous-groupe distingué $Z(G)$ de G défini par

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G\colon gh = hg\}.$$

Soit α un automorphisme de G.

a. Montrer que $\alpha(Z(G)) = Z(G)$.

Soit $G/Z(G)$ le groupe quotient et $\pi\colon G \to G/Z(G)$ le morphisme de passage au quotient.

b. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes

$$\bar{\alpha}\colon G/Z(G) \to G/Z(G)$$

tel que $\bar{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$. (Indication : appliquer la propriété universelle du quotient au morphisme $\pi \circ \alpha$.)

c. Montrer que $\bar{\alpha}$ est un isomorphisme.

Barème sur 20 points :

Exercice 1	15 pts
Exercice 2	5 pts