Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
L3 DE MATHEMATIQUES

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS

Contrôle continu, le 29 mars 2024, 15h45-16h15

CORRIGÉ

Comme $10 = 2 \times 5$, on a $1000 = 10^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125$. Soit

$$f : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

l'isomorphisme du Théorème Chinois défini par $f(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x})$. On détermine f^{-1}. Pour ce faire, on détermine des coefficients de Bézout $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \times 125 + v \times 8 = 1$.

Comme $125 \equiv 4 + 25 \equiv -3 \pmod 8$, on a $(-3) \times 125 \equiv 1 \pmod 8$. Donc $-3 \times 125 - 1$ est un mutliple de 8. Or, $-3 \times 125 - 1 = -376 = (-47) \times 8$. Donc $(-3) \times 125 + 47 \times 8 = 1$.

Alternativement, on peut dérouler l'algorithme d'Euclide, appliqué aux entiers 125 et 8 :

$$\begin{aligned} 125 &= 15 \times 8 + 5 \\ 8 &= 1 \times 5 + 3 \\ 5 &= 1 \times 3 + 2 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1, \end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} 1 &= 3 + (-1) \times 2 \\ &= 3 + (-1) \times (5 + (-1) \times 3) = 2 \times 3 + (-1) \times 5 \\ &= 2 \times (8 + (-1) \times 5) + (-1) \times 5 \\ &= 2 \times 8 + (-3) \times 5 \\ &= 2 \times 8 + (-3) \times (125 + (-15) \times 8) = 47 \times 8 + (-3) \times 125. \end{aligned}$$

Du coup,

$$f^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{(-3) \times 125 \times a + 47 \times 8 \times b}.$$

D'après le cours, $\{-\bar{1}, -\bar{3}\}$ est une famille génératrice de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$. Quant au générateur de $(\mathbb{Z}/125\mathbb{Z})^\times$, un générateur de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ est $\bar{2}$. D'après le cours, $\bar{2}$ ou $\bar{7}$ est générateur de $(\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z})^\times$. Comme ce dernier groupe est d'ordre $5 \times (5-1) = 20$, dont les diviseurs maximaux sont 4 et 10, il suffit de calculer $\bar{2}^4$ et $\bar{2}^{10}$ dans $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ afin de déterminer si $\bar{2}$ en est un générateur. Or, $\bar{2}^4 = \overline{16} \neq \bar{1}$ et $\bar{2}^{10} = \overline{1024} = \overline{24} \neq \bar{1}$ dans $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$. Donc, $\bar{2}$ est bien générateur de $(\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z})^\times$. D'après le cours, $\bar{2}$ est donc générateur de $(\mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z})^\times$.

Il s'ensuit que $(-\bar{1},\bar{1}),(-\bar{3},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2})$ est une famille génératrice de

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/125\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z})^\times.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f^{-1}((-\bar{1},\bar{1})) &= \overline{3\times 125 + 47\times 8} = \overline{751},\\
f^{-1}((-\bar{3},\bar{1})) &= \overline{3\times 125\times 3 + 47\times 8} = \overline{1501} = \overline{501},\\
f^{-1}((\bar{1},\bar{2})) &= \overline{-3\times 125 + 47\times 8\times 2} = \overline{377}
\end{aligned}$$

est une famille génératrice de $(\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z})^\times$.