Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Examen terminal, le 12 mai 2014, 14h00–17h00

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit L/K une extension finie de corps. Montrer que tout élément de L est algébrique sur K.

Exercice 1. Soit $F = \sum a_n X^n$ l'unique série formelle dans $\mathbb{C}[[X]]$ telle que

$$X(D(XF)) = F - 1,$$

où $D(F)$ désigne la dérivée formelle F' de F.

a. Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. La série formelle F appartient-elle au sous-anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes en X ?

c. La série formelle F est-elle une fraction rationnelle en X ?

d. La série formelle F est-elle inversible dans l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$?

Exercice 2. Pour n un entier natural, soit a_n le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2x + 3y = n$. Soit F la série génératrice $\sum a_n X^n$ dans $\mathbb{Q}[[X]]$.

a. Montrer que F est égale à la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1 - X^2)(1 - X^3)}.$$

b. Déterminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

c. En déduire une formule close pour a_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Déterminer le 15-ième polynôme cyclotomique Φ_{15} sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit $P = X^4 + X + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.

a. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

Soit K le corps $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ et désignons par α la classe de X modulo P dans K.

b. Montrer que la famille $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ est une base du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel K.

c. Quel est le cardinal du groupe multiplicatif $K^\star$?

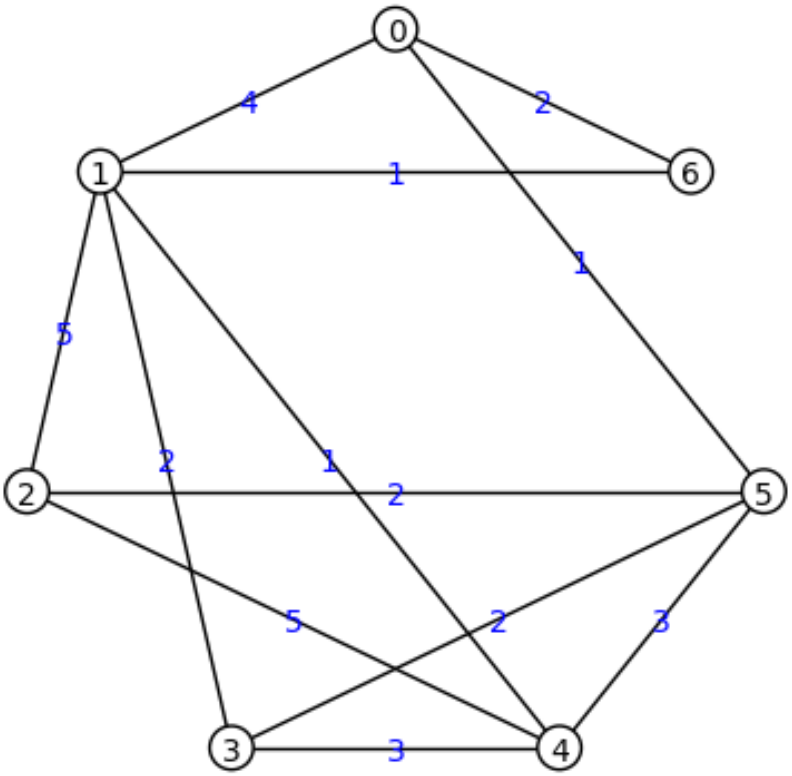
d. Montrer que α est un générateur de $K^\star$.

T. S. V. P.

Alice et Bob veulent convenir d'une clé secrète partagée en suivant le procédé Diffie-Hellman. Alice et Bob décident d'utiliser $G = K^\star$ comme groupe et $g = \alpha$ comme générateur. Alice envoie le message $A = \alpha^3 + \alpha + 1$ à Bob, et Bob envoie le message $B = \alpha^2 + 1$ à Alice.

e. Déterminer la clé secrète d'Alice et Bob.

Exercice 5. Soit G le graphe pondéré ci-dessous. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin le plus court dans G du sommet 0 à n'importe quel autre sommet de G.



Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pts
Exercice 1	4 pts
Exercice 2	4 pts
Exercice 3	2 pts
Exercice 4	5 pts
Exercice 5	3 pts

T. S. V. P.