Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

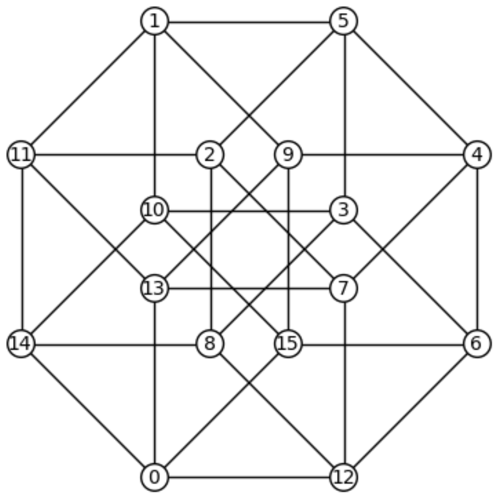
ARITHMETIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

Examen terminal, le 16 mai 2013, 13h30–16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit K un corps et G un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $K^\star$ de K. Montrer que G est cyclique. (On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.)

Exercice 1. Montrer que le graphe ci-dessous est biparti.



Exercice 2. Notons $\mathbb{F}_5[X]_{\leq 2}$ le sous-ensemble de $\mathbb{F}_5[X]$ des polynômes de degré ≤ 2. Soit

$$\varphi\colon \mathbb{F}_5[X]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{F}_5^5$$

l'application $\mathbb{F}_5$-linéaire définie par

$$\varphi(P) = (P(\bar{0}), P(\bar{1}), P(\bar{2}), P(\bar{3}), P(\bar{4}))$$

Soit $C = \mathrm{im}(\varphi)$. On considère C comme code linéaire sur le corps $\mathbb{F}_5$.

a. Quelle est la longueur n du code C ?

b. Quelle est la dimension k de C ?

c. Quelle est la distance minimale d de C ?

d. Combien d'erreurs le code C peut-il corriger ?

T. S. V. P.

e. Déterminer une matrice génératrice G de C.

f. Déterminer une matrice de parité H de C.

Exercice 3. Une partition d'un ensemble E est une collection $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de E telle que : i) pour tout $F \in \mathcal{C}$ on a $F \neq \emptyset$, ii) pour tout $F, G \in \mathcal{C}$ avec $F \neq G$ on a $F \cap G = \emptyset$, et iii) $\bigcup_{F \in \mathcal{C}} F = E$. On désigne par $S_k(E)$ le nombre de partitions de E en k sous-ensembles, i.e., le nombre de partitions $\mathcal{C}$ telles que $\#\mathcal{C} = k$. Notons encore $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $S_0([n]) = 0$ pour $n \geq 1$, et que $S_0([0]) = 1$.

b. Montrer que $S_1([n]) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $S_2([n]) = 2^{n-1} - 1$, pour tout $n \geq 1$.

d. Montrer que $S_k([n]) = kS_k([n-1]) + S_{k-1}([n-1])$, pour tout $k, n \geq 1$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit F_k la série formelle définie par

$$F_k = \sum_{n \geq 0} \frac{S_k([n])}{n!} X^n.$$

e. Montrer que $D(F_k) = kF_k + F_{k-1}$, pour tout $k \geq 1$.

f. Montrer par récurrence sur k que $F_k = \frac{1}{k!}(\exp - 1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

g. En déduire que

$$S_k([n]) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$