

Arithmétique - L3 - MI
Contrôle n°3 - 2009

Question

Soit $m(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

1. Montrer que m n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Déterminer la dérivée $m'(X)$, et la décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$.
3. Montrer que m n'a pas de facteur irréductible multiple.
4. Montrer que m est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
5. Soit $K = \mathbb{F}_2[X]/m$, et notons $\alpha = X \bmod m$. Quel est le cardinal de K ?
6. L'élément α de K^* est-il générateur ?
7. Déterminer un sous-corps de K de cardinal 4.
8. Déterminer un sous-corps de K de cardinal 8.