Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal, le 6 mai 2015, 13h30-16h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une application. Soit $a \in U$.

a. Donner la définition de la différentiabilité de f en a.

b. Donner la définition de la différentielle de f en a, lorsque f est différentiable en a.

c. Montrer l'unicité de la différentielle de f en a, lorsque f est différentiable en a.

Exercice 1. Soient m et n des entiers naturels. Dans cet exercice on identifiera le produit cartésien $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^{m+n}$ de sorte que le produit cartésien de deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{m+n}$.

a. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^m$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts. Montrer que $U \times V$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$.

b. Soient $F \subseteq \mathbb{R}^m$ et $G \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles fermés. Montrer que $F \times G$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^{m+n}$.

c. Soient $C \subseteq \mathbb{R}^m$ et $D \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles compacts. Montrer que $C \times D$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x,y) = \left(xe^{\sin(y)}, \ln(x^2+y^2+1), \arctan(xy)\right).$$

a. Montrer que f est différentiable.

b. Déterminer la différentielle de f en tout point (a,b) de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $f\colon]-2,-1[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,t) = t^x \sin(t).$$

a. Montrer, pour tout $t \in]0,+\infty[$, que la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur l'intervalle $]-2,-1[$.

b. Montrer, pour tout $x \in]-2,-1[$, que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $]0,+\infty[$.

c. Montrer que f est partiellement différentiable par rapport à x en tout point de $]-2,-1[\times]0,+\infty[$.

d. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$.

e. Montrer, pour tout $x \in]-2,-1[$, que la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $]0,+\infty[$.

f. Montrer, pour tout $t \in]0,+\infty[$, que la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.

On définit $F\colon]-2,-1[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt.$$

g. Montrer que F est continue.

h. Montrer que F est dérivable.

i. Donner une formule intégrale pour $F'(x)$.

j. Montrer que F' est continue.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	4 pts
Exercice 1	3 pts
Exercice 2	3 pts
Exercice 3	10 pts