Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE DE MATHEMATIQUES

ANALYSE DANS $\mathbb{R}^n$

Examen terminal particulier, le 19 mai 2014, 9h00-12h00

CORRIGE et BAREME

Question de cours. a. **(1 pt)** Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est fermé si son complémentaire est ouvert.

b. **(2 pts)** On montre plutôt la contraposée : F n'est pas fermé si et seulement s'il existe une suite (x_k) dans F convergente dans $\mathbb{R}^n$ avec $\lim x_k \notin F$.

En effet, supposons que F n'est pas fermé. Le complémentaire F^c n'est donc pas ouvert. Cela veut dire qu'il existe $x_\infty \in F^c$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément $x_\varepsilon \in B(x_\infty, \varepsilon) \setminus F^c$. Si on prend $\varepsilon = 1/k$, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, et si on note, pour simplifier, x_k au lieu de $x_{1/k}$, on a $x_k \in F$, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x_k \to x_\infty$ avec $x_\infty \notin F$. Cela montre donc l'existence d'une suite (x_k) dans F qui converge et dont la limite n'appartient pas à F.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite (x_k) dans F qui converge et dont la limite n'appartient pas à F. Montrons que F n'est pas fermé. Soit x_∞ la limite de la suite x_k. Comme $x_\infty \notin F$, on a $x_\infty \in F^c$. Comme $x_k \to x_\infty$ et $x_k \notin F^c$, le sous-ensemble F^c n'est pas ouvert. Cela veut dire que F n'est pas fermé.

Exercice 1. a. **(1,5 pt)** Comme la fonction $t \mapsto t^2+1$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier, la fonction $t \mapsto 1/(t^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, et il en est de même de la fonction $t \mapsto (t^2+1)^3$. Comme la fonction $t \mapsto t^4+2t^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'argument de la racine carrée, la fonction $t \mapsto (t^4+2t^2)/(t^2+1)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $t^4+2t^2 = t^2(t^2+1)$, cette dernière fonction ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \sqrt{(t^4+2t^2)/(t^2+1)^3}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comme, de plus, les fonction $t \mapsto \cos(e^t)$ et $t \mapsto \sin(e^t)$ sont compositions de fonctions dérivables et donc dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier, les fonctions produits f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}^\star$.

Montrons que f_1 et f_2 ne sont pas dérivables en 0. Remarquons que

$$f_1(t) = |t| \cdot \sqrt{\frac{t^2+2}{(t^2+1)^3}} \cdot \cos(e^t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = |t| \cdot \sqrt{\frac{t^2+2}{(t^2+1)^3}} \cdot \sin(e^t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que les deuxièmes facteurs de ces deux expressions, disons g_1 et g_2 respectivement, sont des fonctions dérivables en 0 ayant dérivée non nulle en 0. Si f_1 et f_2 étaient dérivable en 0, il en était de même pour les fonctions quotient $t \mapsto f_1(t)/g_1(t)$ et $t \mapsto f_2(t)/g_2(t)$. Or, ces deux fonctions coïncident avec la fonction valeur absolue $t \mapsto |t|$ qui n'est pas dérivable en 0. Contradiction, c-à-d que f_1 et f_2 ne sont pas dérivables 0. On a donc $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^\star$.

La fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. On a donc $U_3 = \mathbb{R}$.

b. **(0,5 pt)** La fonction f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si f_1, f_2 et f_3 sont dérivables en a. Du coup, $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \mathbb{R}^\star$ d'après le a.

c. **(1 pt)** La limite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe si et seulement si les limites $\lim_{t\to+\infty} f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, existent. Or,

$$\frac{t^4 + 2t^2}{(t^2 + 1)^3} = \frac{t^4 + 2t^2}{t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1} = \frac{t^{-2} + 2t^{-4}}{(1 + 3t^{-2} + 3t^{-4} + t^{-6}} \to 0$$

lorsque t tend vers $+\infty$. Comme les fonctions $t \mapsto \cos(e^t)$ et $t \mapsto \sin(e^t)$ sont bornées, les fonctions produit f_1 et f_2 tendent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Il est clair qu'il en est de même pour f_3. Par conséquent, la limite $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et elle vaut $(0, 0, 0)$. (voir le figure ci-dessous)

Exercice 2. a. **(0,5 pt)** Le complémentaire de U dans $\mathbb{R}^3$ est le plan yz. Si une suite convergente dans $\mathbb{R}^3$ est contenue dans ce plan, sa limite y appartient. En effet, soit (x_k) une suite convergente dans $\mathbb{R}^3$ contenue dans le plan le plan yz. Or, le plan yz est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = 0$. On a donc $x(x_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, Comme la fonction $(x, y, z) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^3$, on a aussi $x(\lim x_k) = \lim x(x_k) = 0$, i.e., $\lim x_k$ appartient au plan yz. Cela montre que le plan yz est fermé et son complémentaire U est donc ouvert dans $\mathbb{R}^3$.

b. **(0,5 pt)** Observons que l'image de la droite $\{(\frac{1}{2}, 0)\} \times \mathbb{R}$ est le cercle dans le plan xz de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. L'image de $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^2$ est donc la surface de révolution autour de l'axe z obtenue à partirde ce cercle, i.e., un donut dans $\mathbb{R}^3$. (voir le figure ci-dessous)

c. **(0,5 pt)** Non. On a clairement $f(1, 0, 0) = f(1, 2\pi, 0)$.

d. **(0,5 pt)** Comme l'image par f du sous-ensemble $\mathbb{R}^{+,\star} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est la réunion de tous les cercles de centre $(1, 0, 0)$ dans le plan xz, on voit que l'image par f de $\mathbb{R}^{+,\star} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est égale au plan xz privé du point $(1, 0, 0)$. Comme l'image par f est obtenue par révolution autour de l'axe z de ce plan privé d'un point, on a bien $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$.

e. **(0,5 pt)** Comme les fonctions coordonnée de f sont de classe $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi.

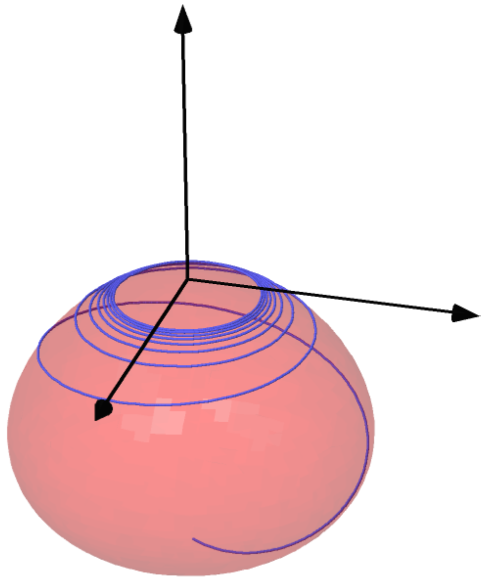

FIGURE 1 – La courbe image de l'exercice 1. Elle est contenue dans le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x^2 + y^2 = z^3 - z$ dont une partie a été dessinée.

f. **(0,5 pt)** On calcule :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f_1}{\partial r} = \cos\theta \cdot \cos\varphi & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -(1 + r\cos\theta)\sin\varphi & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} = \cos\theta \cdot \sin\varphi & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = (1 + r\cos\theta)\cos\varphi & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} = \sin\theta & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{array}$$

g. La matrice jacobienne est

$$J_a f = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi & -(1 + r\cos\theta)\sin\varphi & -r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi & (1 + r\cos\theta)\cos\varphi & -r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

h. **(0,5 pt)** Comme g est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

i. **(0,5 pt)** Une composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

j. **(0,5 pt)** Calculons $g \circ f$:

$$g(f(r, \varphi, \theta)) = (1 + r\cos\theta)^2 \cos^2\varphi + (1 + r\cos\theta)^2 \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\theta = (1 + r\cos\theta)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\sin^2\theta = (1 + r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta = 1 + 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 2r\cos\theta + r^2.$$

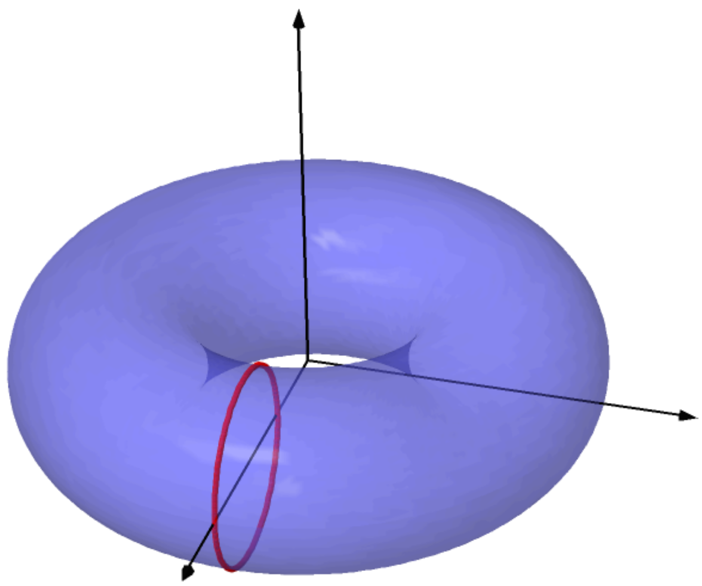

FIGURE 2 – L'image du sous-ensemble $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^2$ par f de l'exercice 2, avec le cercle dans le plan xz de centre $(1,0,0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

On voit que

$$J_{(r,\varphi,\theta)}(g \circ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)}{r} & \frac{\partial(g\circ f)}{\varphi} & \frac{\partial(g\circ f)}{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta + 2r & 0 & -2r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. a. **(1 pt)** Il est clair que $||(x,y,z)||' \geq 0$, et que $||(0,0,0)||' = 0$. Supposons que $||(x,y,z)||' = 0$ et montrons que $(x,y,z) = (0,0,0)$. Comme $||(x,y,z)||' = 0$, on a $|x+y| + |x+y+z| + |y+z| = 0$. Du coup, $x+y=0$, $x+y+z=0$ et $y+z=0$. On en déduit aisément que $z=0$, puis $y=0$ et ensuite $x=0$.

Puis, montrons que $||\lambda \cdot (x,y,z)||' = |\lambda| \cdot ||(x,y,z)||'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En effet,

$$\begin{aligned} ||\lambda \cdot (x,y,z)||' = ||(\lambda x, \lambda y, \lambda z)||' = \\ |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x + \lambda y + \lambda z| + |\lambda y + \lambda z| = \\ |\lambda| \cdot |x+y| + |\lambda| \cdot |x+y+z| + |\lambda| \cdot |y+z| = |\lambda| \cdot ||(x,y,z)||'. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'inégalité triangulaire pour la fonction $||\cdot||'$. Soient donc $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. D'après l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue sur les nombres réels, on a

$$||(x,y,z)+(x',y',z')||' = ||(x+x',y+y',z+z')||' =$$
$$|x+x'+y+y'|+|x+x'+y+y'+z+z'|+|y+y'+z+z'| \le$$
$$|x+y|+|x'+y'|+|x+y+z|+|x'+y'+z'|+|y+z|+|y'+z'| =$$
$$||(x,y,z)||'+||(x',y',z')||'.$$

L'application $||\cdot||'$ est donc une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b. **(1 pt)** D'après le cours, deux normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes. D'où l'existence des nombres réels m et M ayant les propriétés requises.

c. **(2 pts)** On a

$$||(x,y,z)||' = |x+y|+|x+y+z|+|y+z| \le |x|+|y|+|x|+|y|+|z|+|y|+|z| =$$
$$2|x|+3|y|+2|z| \le 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+3\sqrt{x^2+y^2+z^2}+2\sqrt{x^2+y^2+z^2} =$$
$$7||(x,y,z)||.$$

Du coup, $M = 7$ convient.

De l'autre côté, on a

$$|x| = |(x+y+z)-(y+z)| \le |x+y+z|+|y+z| \le ||(x,y,z)||'$$
$$|y| = |(x+y)-(x+y+z)+(y+z)| \le$$
$$|x+y|+|x+y+z|+|y+z| = ||(x,y,z)||'$$
$$|z| = |-(x+y)+(x+y+z)| \le |x+y|+|x+y+z| \le ||(x,y,z)||'.$$

D'où

$$||(x,y,z)|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le |x|+|y|+|z| \le 3||(x,y,z)||',$$

ou encore

$$\tfrac{1}{3}||(x,y,z)|| \le ||(x,y,z)||'.$$

Par conséquent $m = \frac{1}{3}$ convient.

Exercice 4. a. **(0,5 pt)** On a $f_x(t) = (\ln t)^x = \exp(x \cdot \ln(\ln t))$ pour tout $t \in I$. Du coup, f_x est continue sur I pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, f_x est HK-intégrable.

b. **(0,5 pt)** On a

$$F(0) = \int_e^{e^2} f(0,t)\,dt = \int_e^{e^2} dt = e^2 - e.$$

Pour $F(1)$, on fait de l'intégration par parties :

$$F(1) = \int_e^{e^2} f(1,t)\,dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln t\,dt =$$
$$[t\ln t]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot \frac{1}{t}\,dt = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2.$$

Pour $F(2)$, on fait encore de l'intégration par parties et on utilise $F(1) = e^2$:

$$F(2) = \int_e^{e^2} f(2,t)\,dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln^2(t)\,dt =$$
$$\left[t\ln^2 t\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot 2\ln t \cdot \frac{1}{t}\,dt = 4e^2 - e - 2F(1) = 2e^2 - e.$$

c. **(0,5 pt)** Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a, de même,

$$F(n) = \int_e^{e^2} f(n,t)\,dt = \int_e^{e^2} 1 \cdot \ln^n(t)\,dt =$$
$$[t\ln^n t]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} t \cdot n\ln^{n-1} t \cdot \frac{1}{t}\,dt = 2^n e^2 - e - nF(n-1).$$

d. **(0,5 pt)** Pour $t \in I$ fixe, la fonction $x \mapsto \exp(x\ln(\ln t))$ est bien dérivable. Il s'ensuit que f est partiellement dérivable par rapport à x en tout point de $\mathbb{R} \times I$.

e. **(0,5 pt)** On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln(\ln t)\exp(x\ln(\ln t)).$$

f. **(0,5 pt)** La fonction $(x,t) \mapsto \ln(\ln t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$. Du coup, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times I$.

g. **(1 pt)** D'après le cours, si f est une fonction sur $\mathbb{R} \times I$, où I est un segment, qui est dérivable par rapport à x et dont la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue, alors la fonction F définie ci-dessus est de class $\mathcal{C}^1$.

h. **(0,5 pt)** D'après le cours encore,

$$F'(x) = \int_e^{e^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_e^{e^2} \ln(\ln t)(\ln t)^x\,dt.$$

i. **(0,5 pt)** Pour $t \in I = [e, e^2]$, on a $\ln t \in [1,2]$ et $\ln(\ln t) \in [0, \ln 2]$. En particulier, $\ln(\ln t) \geq 0$ pour $t \in I$, et > 0 si $t \neq e$. Du coup,

$$\ln(\ln t)(\ln t)^x = \ln(\ln t)e^{x\ln(\ln t)} \geq 0$$

pour tout $t \in I$ et > 0 si $t \neq e$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Il suit du h que $F'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, i.e., F est strictement croissante.