

Université de Bretagne Occidentale  
 UFR Sciences et Techniques  
 LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL  
**REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES**  
 Examen terminal, le 18 décembre 2006, 8h30–11h30  
**CORRIGE et BAREME**

**Exercice 1.** Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On a  $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ , par définition de  $V$ . On cherche un sous-espace vectoriel  $W$  de  $\mathbb{R}^5$  tel que  $V \oplus W = \mathbb{R}^5$ .

Soit  $M$  la matrice  $5 \times 8$  dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1, v_2, v_3, e_1, \dots, e_5$ . Lorsqu'on effectue la méthode du pivot de Gauss sur  $M$ , on obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{1 \text{ pt}}).$$

Comme chacune des 3 premières colonnes de  $M'$  contient un pivot, les 3 premières colonnes de  $M$  sont linéairement indépendantes, c-à-d, la famille  $v_1, v_2, v_3$  est une base de  $V$ . Comme les 4-ième et 6-ième colonnes de  $M'$  contiennent les autres pivots, la famille  $v_1, v_2, v_3, e_1, e_3$  est une base de  $\mathbb{R}^5$ . Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  engendré par  $e_1, e_3$ . Comme  $v_1, v_2, v_3, e_1, e_3$  est une base de  $\mathbb{R}^5$ , on a bien  $\mathbb{R}^5 = V \oplus W$  (**1 pt**).

**Exercice 2.** Soit  $v_1, \dots, v_6$  la famille donnée. Soit  $M$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1, \dots, v_6$ . On effectue la méthode du pivot de Gauss sur  $M$ , et on obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{1 \text{ pt}}).$$

Comme les pivots de  $M'$  se trouvent dans les colonnes 1, 2, 3, 5, les colonnes correspondantes de  $M$  constituent une base de  $\mathbb{R}^4$ . La famille  $v_1, v_2, v_3, v_5$  est donc une base extraite de la famille donnée (**1 pt**).

**Exercice 3.** D'après le cours, une matrice réelle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si toutes les valeurs propres sont réelles, et pour toute valeur propre  $\lambda$ , on a  $\dim(E_\lambda) = \text{mult}(\lambda)$  (**1 pt**).

Soit  $A$  la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $-(X - 1)(X - 2)^2$ . Le nombre réel 2 est donc valeur propre de  $A$  de multiplicité 2. Comme  $\text{rang}(A - 2I) = 2$ , le noyau de  $A - 2I$  est de dimension  $3 - 2 = 1$ , d'après le théorème du rang. On a donc  $\dim(E_2) = 1$ . Il s'ensuit que  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  (**0,5 pt**).

Soit  $B$  la matrice définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $B$  est égal à  $-(X - 1)^3$ . Le nombre réel 1 est donc la seule valeur propre de  $B$ . Si  $B$  était diagonalisable,  $B$  aurait été semblable à la matrice identité. Mais seule la matrice identité est semblable à la matrice identité. Donc  $B$  n'est pas diagonalisable (**0,5 pt**).

Soit  $C$  la matrice définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $C$  est égal à  $-(X - 1)^2(X - 2)$ . Les valeurs propres de  $C$  sont donc les nombres réels 1, 2. Comme  $\dim(E_2) \geq 1$  et  $\dim(E_2) \leq \text{mult}(2) = 1$ , on a bien  $\dim(E_2) = \text{mult}(2)$ . Comme  $C - I$  est de rang 1,  $\dim(E_1) = 2 = \text{mult}(1)$ . Il s'ensuit que  $C$  est diagonalisable (**0,5 pt**).

Soit  $D$  la matrice définie par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $D$  est égal à  $-(X-2)(X^2-X+1)$ . Comme le discriminant de  $X^2-X+1$  est strictement négatif, la matrice  $D$  admet une valeur propre non réelle. Il s'ensuit que  $D$  n'est pas diagonalisable **(0,5 pt)**.

**Exercice 4.** Soit  $A$  la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 4 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est égal à  $-(X-3)(X-4)^2$ . Les valeurs propres de  $A$  sont donc 3, 4. Comme on a  $\dim(E_3) \geq 1$ ,  $\text{mult}(3) = 1$  et  $\dim(E_3) \leq \text{mult}(3)$ , on a bien  $\dim(E_3) = \text{mult}(3)$  **(1 pt)**. Comme  $\text{mult}(4) = 2$ , la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\dim(E_4) = 2$  **(1 pt)**. D'après le Théorème du rang,  $\dim(E_4) = 3 - \text{rang}(A - 4I)$  **(1 pt)**. La matrice  $A$  est donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $\text{rang}(A - 4I) = 1$ . Or, la matrice

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 1 si et seulement si  $c = 0$  **(1 pt)**. Il s'ensuit que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $c = 0$ .

**Exercice 5.** a. Le polynôme caractéristique de  $A$  sur  $\mathbb{R}$  est

$$X^4 + 15X^3 + 54X^2 - 108X - 648 = (X-3)(X+6)^3.$$

Comme le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , la matrice  $A$  est diagonalisable **(1 pt)**.

b. Un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre 3 est le vecteur

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $-6$  est

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On complète la famille  $v_1, v_2$  en une base de  $\mathbb{R}^4$ . Pour cela, on effectue la méthode du pivot de Gauss sur la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que la famille  $v_1, v_2, e_1, e_3$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $P_1$  la matrice  $4 \times 4$  dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1, v_2, e_1, e_3$ . La matrice  $P_1$  est inversible car ses colonnes constituent une base. On a

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & -6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2 \text{ pt}}).$$

Il reste à trigonaliser la matrice  $2 \times 2$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

dont on sait que son polynôme caractéristique est égal à  $(X+6)^2$ . Un vecteur propre de  $B$  pour la valeur propre  $-6$  est le vecteur

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On peut compléter  $w_1$  en une base de  $\mathbb{R}^2$  en rajoutant  $e_1$ . Soit  $Q_2$  la matrice  $2 \times 2$  dont les colonnes sont  $w_2, e_1$ . On a

$$Q_2^{-1}BQ_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Soit  $P_2$  la matrice  $4 \times 4$  diagonale en bloc

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & -6 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{2 \text{ pt}}).$$

Donc la matrice  $P = P_1P_2$  convient.

**Exercice 6.** a. Les valeurs propres de  $A$  sont  $4, -8$ . Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a  $E_4 = \text{Vect}(v_1, v_2)$  et  $E_{-8} = \text{Vect}(v_3, v_4, v_5, v_6)$  (**1 pt**). On doit vérifier que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  pour  $i = 1, 2$  et  $j = 3, 4, 5, 6$ . Soient  $V$  la matrice  $6 \times 2$  de colonnes  $v_1, v_2$  et  $W$  la matrice  $6 \times 4$  de colonnes  $v_3, v_4, v_5, v_6$ . On a  ${}^tVW = 0$ . Ce qui montre que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  pour  $i = 1, 2$  et  $j = 3, 4, 5, 6$ . Les espaces propres  $E_4$  et  $E_{-8}$  sont donc bien orthogonaux (**1 pt**).

b. On effectue Gram-Schmidt sur les familles  $v_1, v_2$  et  $v_3, v_4, v_5, v_6$ , respectivement. On obtient

$$v'_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-4}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et

$$v'_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v'_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, v'_3 \rangle}{\langle v'_3, v'_3 \rangle} v'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v'_5 = v_5 - \frac{\langle v_5, v'_3 \rangle}{\langle v'_3, v'_3 \rangle} v'_3 - \frac{\langle v_5, v'_4 \rangle}{\langle v'_4, v'_4 \rangle} v'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v'_6 = v_6 - \frac{\langle v_6, v'_3 \rangle}{\langle v'_3, v'_3 \rangle} v'_3 - \frac{\langle v_6, v'_4 \rangle}{\langle v'_4, v'_4 \rangle} v'_4 - \frac{\langle v_6, v'_5 \rangle}{\langle v'_5, v'_5 \rangle} v'_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le a, la famille  $v'_1, \dots, v'_6$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^6$  (**1 pt**).

Ensuite on normalise :

$$v_1'' = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_3'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_4'' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5'' = \frac{\sqrt{6}}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v_6'' = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{1 \text{ pt}}).$$

Soit  $P$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $v_1'', \dots, v_6''$ . Comme la base  $v_1'', \dots, v_6''$  est orthonormée,  $P$  est une matrice orthogonale. De plus, comme  $v_1'', v_2''$  est une base de  $E_4$  et  $v_3'', \dots, v_6''$  est une base de  $E_{-8}$ , on a

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$