Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE 2 D'INFORMATIQUE PARCOURS IL

# REDUCTION DES APPLICATIONS LINEAIRES

Controle continu, le 29 novembre 2006, 13h30-14h00

CORRIGE et BAREME

**Exercice 1.** a. On calcule

$$\det(A - XI) = \det \begin{pmatrix} -1-X & 4 & 1 \\ -2 & 4-X & 1 \\ 2 & -1 & -X \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -1-X & 4 & 1 \\ -1+X & -X & 0 \\ 2 & -1 & -X \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1+X & -X \\ 2 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$- X \det \begin{pmatrix} -1-X & 4 \\ -1+X & -X \end{pmatrix} = (X+1) - X(X^2 - 3X + 4) =$$

$$= -X^3 + 3X^2 - 3X + 1 = -(X-1)^3 \quad \textbf{(2 pt)}.$$

b. Comme 1 est la seule valeur propre de $A$, si $A$ était diagonalisable, $A$ aurait été égale à la matrice identité, ce qui n'est pas le cas. Donc $A$ n'est pas diagonalisable **(3 pt)**.

c. On cherche des vecteurs $v_1, v_2, v_3$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(A - I)v_1 = 0, \quad (A - I)v_2 = v_1 \quad \text{et} \quad (A - I)v_3 = v_2.$$

Des solutions non triviales de ces 3 systèmes sont

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $v_1, v_2, v_3$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $P$ la matrice de colonnes $v_1, v_2, v_3$. Comme $Av_1 = v_1$, $Av_2 = v_1 + v_2$ et $Av_3 = v_2 + v_3$, on a

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire **(5 pt)**.