Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1ERE ANNEE IMP ENTREE A
PARCOURS MASS

ALGEBRE LINEAIRE 1

Contrôle continu, le 4 mai 2007, 11h45–12h15

Corrigé et barème

Exercice 1. a. La matrice de f dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

b. Comme

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

les vecteurs v_1, v_2 sont linéairement indépendants, et constituent donc une base de $\mathbb{R}^2$ **(2 pt)**.

c. Montrons que les vecteus w_1, w_2, w_3 sont linéairement indépendants. Supposons que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$. On a donc

$$\begin{cases} \lambda_1 & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & -\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la famille w_1, w_2, w_3 est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$ **(2 pt)**.

d.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

e.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

f. D'après le cours, $A' = Q^{-1}AP$ **(1 pt)**. Déterminons d'abord Q^{-1} par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$

Du coup

$$A' = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -10 & -13 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pt)}.$$