UBO - L1 AES - 2017/2018 - UE de mathématiques
Contrôle continu 1 - le 23 mars 2018 - 13h30-14h30
CORRIGE

1. Que vaut $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$? On met sous le même dénominateur : $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$.
2. Que vaut $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$? On a $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{3}$.
3. Que vaut $\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$?
$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}} = \frac{1}{2+\frac{4}{13}} = \frac{1}{\frac{26}{13}+\frac{4}{13}} = \frac{1}{\frac{30}{13}} = \frac{13}{30}.$$
4. Est-ce que $0,88888\cdots = 0,9$? Non, $0,88888\cdots = \frac{8}{9}$ car
$$9 \times 0,88888\cdots = (10-1) \times 0,88888\cdots = 8,88888\cdots - 0,88888\cdots = 8,$$
et $\frac{8}{9} \neq \frac{9}{10} = 0,9$.
5. Que vaut $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$?
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$
6. Que vaut $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^2$? On a $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times 2} = \sqrt{2}^{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^2)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$.
7. Que vaut $\sqrt{2}/\sqrt[3]{2}$? On a
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}.$$
8. Le prix d'un m^3 de gaz naturel a augmenté de 10% le 1er janvier 2014. De combien le prix de $2m^3$ de gaz naturel a-t-il augmenté le 1er janvier 2014 ? Une augmentation de 10% correspond à multiplier par $1,1$. Peu importe si on multiplie $1m^3$ ou $2m^3$ par $1,1$, l'augmentation sera toujours de 10%.
9. Le loyer annuel d'un garage est augmenté chaque année de 5%. De combien a-t-il augmenté en 2 ans ? Une augmentation de 5% revient à multiplier par $1,05$. Deux augmentations successives de 5% correspondent à multiplier par $1,05^2$. Or, $1,05^2 = 1,05+0,0525 = 1,1025$, ce qui correspond à son tour à une augmentation de $10,25$%.
10. Quel est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $-2x+1 \geq -x+2$? L'inégalité $-2x+1 \geq -x+2$ est équivalente à $1-2 \geq -x+2x$, c-à-d, $-1 \geq x$. L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -1]$.
11. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$. La question n'a pas de sens pour $x = -1$; on suppose donc que $x \neq -1$. Comme $(x+1)^2 > 0$, l'inégalité $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ est équivalente à $(x+1)^2 \times \frac{x-1}{x+1} \geq 0$, c-à-d, à $(x+1)(x-1) \geq 0$, ou encore à $x^2 - 1 \geq 0$. Cette dernière inégalité est équivalente à $x^2 \geq 1$, ou encore à $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1}$, c-à-d, à $|x| \geq 1$. D'où l'ensemble des solutions est $]-\infty, -1[\cup [1, \infty[$. (Erreur dans l'énoncé ; la bonne réponse n'y est pas ; +1 point pour tout le monde, et -1 pour le rédacteur du sujet ; avec les excuses du rédacteur.)

12. Quel est le nombre de solutions du système d'équations $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$? Notons que si x et y sont solutions du système, la première équation plus 2 fois la deuxième est également vérifiée. Or, elle correspond à l'équation $0 = -1$ ce qui est absurde. Il n'y a donc aucune solution.
13. Quel est le nombre de solutions de l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$? Le discriminant vaut $(-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1$. Comme il est strictement positif, il y a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
14. Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inégalité $x^2 \leq x + 6$? Cette inégalité est équivalente à $x^2 - x - 6 \leq 0$. Comme $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, elle est encore équivalente à $(x+2)(x-3) \leq 0$. Les nombres réels -2 et 3 la vérifient bien. Si $x \neq -2, 3$, l'inégalité est équivalente à $(x+2)(x-3) < 0$. Dans ce cas, on a ou bien $x + 2 < 0$ et $x - 3 > 0$, ou bien $x + 2 > 0$ et $x - 3 < 0$. Comme il n'y a pas de nombre réel tel que $x < -2$ et $x > 3$, seul le deuxième cas se produit et l'ensemble des solutions et $[-2, 3]$.
15. Quel est lensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(x+1)^2 + (x^2 - x - 2) = 0$? Si on développe le premier membre, on obtient

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - x - 2 = 2x^2 + x - 1.$$

Le discriminant vaut $1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$. Les solutions sont donc $(-1+3)/4$ et $(-1-3)/4$, c-à-d, $\frac{1}{2}$ et -1. (Encore une erreur dans l'énoncé ; la bonne réponse n'y est pas ; +1 point pour tout le monde, et -1 pour le rédacteur du sujet ; avec les excuses du rédacteur)
16. Que vaut $(\sqrt{x} - 1)^2$? On a $(\sqrt{x} - 1)^2 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1$.
17. Que vaut $e^{-1} + e^1$? On a $e^{-1} + e^1 = e^{-1} \times 1 + e^{-1} \times e^2 = e^{-1}(1 + e^2) = e^{-1}(e^2 + 1)$.
18. Que vaut e^{x^2} ? On a $e^{x^2} = e^{x \cdot x} = (e^x)^x$.
19. Que vaut $\ln(e^x)$? Par définition de ln on a $\ln(e^x) = x$.
20. Que vaut la partie entière du nombre réel $\log_{10}(12345)$? Comme $10^4 \leq 12345 < 10^5$, on a

$$4 = \log_{10}(10^4) \leq \log_{10}(12345) < \log_{10}(10^5) = 5$$

car la fonction $\log_{10}$ est strictement croissante. La partie entière de $\log_{10}(12345)$ est donc égale à 4.