Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 22 octobre 2014, 11h55-12h15
CORRIGE

Exercice 1. a. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe dont le carré est égal à $-12 - 5i$, où on suppose que x, y sont des nombres réels. On a donc

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -12 - 5i.$$

Comme $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont réels, on en déduit que

$$x^2 - y^2 = -12 \quad \text{et} \quad 2xy = -5.$$

Comme $z^2 = -12 - 5i$, on a aussi $|z|^2 = |z^2| = |-12 - 5i|$, i.e., $x^2 + y^2 = |-12 - 5i|$. Déterminons le module $|-12 - 5i|$ du nombre complexe $-12 - 5i$. Notons que

$$12^2 + 5^2 = 12^2 + 25 = 12^2 + 2 \times 12 + 1 = (12 + 1)^2 = 13^2.$$

Il s'ensuit que $|-12 - 5i| = 13$, et on a $x^2 + y^2 = 13$.

On a vu ci-dessus que $x^2 - y^2 = -12$ et que $x^2 + y^2 = 13$. On a donc $2x^2 = 1$, i.e., $x^2 = \frac{1}{2}$, ou encore $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Prenons $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Comme $2xy = -5$, on a $y = -\frac{5}{2}\sqrt{2}$. Une racine carrée de $-12-5i$ est donc $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-5i)$.

b. Déterminons le discriminant Δ de l'équation :

$$\Delta = (-(i+1))^2 - 4 \times 1 \times (3i+6) = 2i - 12i - 24 = -24 - 10i = 2 \times (-12 - 5i).$$

D'après le a, une racine carré de Δ est

$$\delta = \sqrt{2} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 5i) = 1 - 5i.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\tfrac{1}{2}(i + 1 \pm \delta) = 1 - 2i \quad \text{et} \quad 3i.$$