Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 12 juin 2014, 8h30-11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Soit K un corps commutatif et soit $A \in K[X]$. Supposons que $a \in K$ est une racine de A dans K. Montrer que le polynôme $X - a$ divise A dans $K[X]$.

Exercice 1. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$2i\, z^2 - (2i - 2)\; z + 8i - 16 = 0.$$

Exercice 2. Dire de chacun des énoncés suivants s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donner une démonstration. S'il est faux, donner un contre-exemple.

a. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont des applications ensemblistes avec f injective, alors $g \circ f$ est injective.

b. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont des applications ensemblistes avec g injective, alors $g \circ f$ est injective.

c. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont des applications ensemblistes avec f surjective, alors $g \circ f$ est surjective.

d. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont des applications ensemblistes avec g surjective, alors $g \circ f$ est surjective.

Exercice 3. Soit R la relation sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels définie par : $x\, R\, y$ si et seulement si le chiffre des dizaines de x est égal au chiffre des dizaines de y, dans l'écriture décimale de x et y.

a. Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.

b. Donner un élément pour chaque classe d'équivalence dans $\mathbb{N}$ pour la relation R.

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)^n.$$

a. Montrer par récurrence que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer par récurrence que $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

T. S. V. P.

Exercice 5. a. Montrer que 199 et 123 sont premiers entre eux et déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$199 \times u + 123 \times v = 1.$$

b. Déterminer, en utilisant la question précédente, $u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$199^2 \times u' + 123 \times v' = 1.$$

c. Déterminer, en utilisant la question précédente, $u'', v'' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$199^2 \times u'' + 123^2 \times v'' = 1.$$

Exercice 6. Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ les polynômes définis par

$$A = X^5 + X^4 + X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^4 + X^3 + X + 1.$$

a. Déterminer le pgcd de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
b. Déterminer les racines communes de A et B dans $\mathbb{R}$.
c. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{C}[X]$.
d. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de B dans $\mathbb{R}[X]$.
e. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de A dans $\mathbb{C}[X]$.
f. Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de A dans $\mathbb{R}[X]$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pts
Exercice 1	3 pts
Exercice 2	2 pts
Exercice 3	2 pts
Exercice 4	2 pts
Exercice 5	3 pts
Exercice 6	6 pts

T. S. V. P.