Université de Bretagne Occidentale

UFR Sciences et Techniques

LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Contrôle continu, le 10 octobre 2013, 13h30-14h00

CORRIGE

Exercice 1. a. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe dont le carré est égal à $-15 - 8i$, où on suppose que x, y sont des nombres réels. On a donc

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -15 - 8i.$$

Comme $x^2 - y^2$ et $2xy$ sont réels, on en déduit que

$$x^2 - y^2 = -15 \quad \text{et} \quad 2xy = -8.$$

Comme $z^2 = -15 - 8i$, on a aussi $|z|^2 = |z^2| = |-15 - 8i|$, i.e., $x^2 + y^2 = |-15 - 8i|$. Déterminons le module $|-15 - 8i|$ du nombre complexe $-15 - 8i$. Notons que

$$15^2 + 8^2 = 15^2 + 64 = 15^2 + 2 \times 2 \times 15 + 2^2 = (15 + 2)^2 = 17^2.$$

Il s'ensuit que $|-15 - 8i| = 17$, et on a $x^2 + y^2 = 17$.

On a vu ci-dessus que $x^2 - y^2 = -15$ et que $x^2 + y^2 = 17$. On a donc $2x^2 = 2$, i.e., $x^2 = 1$, ou encore $x = \pm 1$. Comme $2xy = -8$, on a $y = -4$ si $x = 1$, et $y = 4$ si $x = -1$. Les racines carrées de $-15 - 8i$ sont donc $\pm(1 - 4i)$.

b. Déterminons le discriminant Δ de l'équation :

$$\Delta = (2i - 1)^2 - 4 \times 1 \times (i + 3) = -4 - 4i + 1 - 4i - 12 = -15 - 8i.$$

D'après le a, une racine carré de Δ est $\delta = 1 - 4i$. Les solutions de l'équation sont donc

$$\tfrac{1}{2}(2i - 1 \pm \delta) = -i \quad \text{et} \quad -1 + 3i.$$