Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS 1

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Examen terminal, le 7 janvier 2013, 8h30-11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Enoncer le Théorème d'Euclide portant sur les nombres premiers, et le démontrer.

Exercice 1. Soit A, B, C des assertions quelconques. Les assertions

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \quad \text{et} \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$

sont-elles équivalentes ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple explicite.

Exercice 2. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ et soit R la relation sur E telle que

$$1\,R\,1,\ 1\,R\,2,\ 1\,R\,3,\ 2\,R\,2,\ 2\,R\,3,\ 3\,R\,3,\ 3\,R\,1.$$

Est-ce que R est une relation d'ordre partiel sur E ? Si oui, le démontrer, sinon dire pourquoi elle ne l'est pas.

Exercice 3. Sachant que le quotient et le reste dans la division euclidienne de 3655384 par 2013 sont 1815 et 1789, respectivement, quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne

a. de 3655384 par -2013,

b. de -3655384 par 2013, et

c. de -3655384 par -2013 ?

Exercice 4. Montrer par récurrence que 3 divise $n(n^2 + 5)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que le reste dans la division euclidienne de A par $X - x$ est le polynôme constant $A(x)$.

Exercice 6. Soit $P = X^2 - 6X + 25$ et $Q = P(X^2) = X^4 - 6X^2 + 25$.

a. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

c. Déterminer les racines carrées des racines de P dans $\mathbb{C}$.

d. Quelles sont les racines de Q dans $\mathbb{C}$?

T. S. V. P.

e. Décomposer Q en facteurs irrédictibles dans $\mathbb{C}[X]$.

f. En déduire la décomposition de Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7. Soient $P = X^2 + X + 2$ et $Q = X^2 + 3X - 4$.

a. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

b. En déduire que P et Q sont premiers entre eux.

c. Déterminer $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Soient $B = PQ$ et $A = X^3 + X^2 + 4X + 1$.

d. Décomposer en éléments simples U/Q dans $\mathbb{R}(X)$.

e. Décomposer en éléments simples $1/B$ dans $\mathbb{R}(X)$.

f. Décomposer en éléments simples A/B dans $\mathbb{R}(X)$.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	3 pt
Exercice 1	1 pt
Exercice 2	1 pt
Exercice 3	1 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	2 pt
Exercice 6	5 pt
Exercice 7	5 pt

T. S. V. P.