

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 1ERE ANNEE PARCOURS A IMP
ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal 2nd session, le 11 juin 2008, 8h30–11h30

Documents et calculatrices sont interdits.

Question de cours. Énoncer le Théorème de Borel-Lebesgue.

Exercice 1. Soit E l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Définir une relation R sur E par

$$xRy \iff [\sqrt{x}] = [\sqrt{y}],$$

pour tout $x, y \in E$. (Rappelons que $[\alpha]$ désigne la partie entière de α , i.e., $[\alpha]$ est le plus grand entier inférieur ou égal au nombre réel α .)

- a. Montrer que R est une relation d'équivalence.
- b. Déterminer les classes d'équivalence de R .
- c. Quel est le cardinal de E/R ?

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

Exercice 3. Soit P et Q des polynômes en X à coefficients entiers. Vrai ou faux : si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ alors, pour tout entier n , les entiers $P(n)$ et $Q(n)$ sont premiers entre eux dans \mathbb{Z} . Donner une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 4. Soit $d = \text{pgcd}(2009, 1789)$.

- a. Déterminer d .
- b. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $2009u + 1789v = d$.

Exercice 5. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle définie par

$$F = \frac{16X^2}{X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1}$$

Décomposer F en éléments simples.

Exercice 6. Soit $(s_n)_{n \geq 2}$ la suite définie par

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite (s_n) converge.

Barème indicatif sur 20 points :

Q de cours	2 pt
Exercice 1	4 pt
Exercice 2	2 pt
Exercice 3	2 pt
Exercice 4	2 pt
Exercice 5	4 pt
Exercice 6	4 pt