Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Contrôle continu, le 11 octobre 2006
CORRIGE et BAREME

Ce contrôle est noté sur 6.

Exercice 1. Lorsque $n = 0$, on a $n^3 - n = 0$ qui est bien un multiple de 3. L'assertion est donc vérifiée au rang $n = 0$ **(1 pt)**.

Supposons que l'assertion est vraie au rang n, pour un certain entier naturel n fixé **(1 pt)**. Montrons que l'assertion est alors vraie au rang $n+1$. Or,

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n).$$

Par hypothèse de récurrence, $n^3 - n$ est un multiple de 3. Comme $3(n^2 + n)$ est aussi un multiple de 3, la somme des deux est un multiple de 3. D'où $(n+1)^3 - (n+1)$ est un multiple de 3 **(1 pt)**.

Exercice 2. Soit $z = x + iy$ une racine carrée de $-1 + 2i\sqrt{6}$, i.e., $z^2 = -1 + 2i\sqrt{6}$. On a donc

$$(x^2 - y^2) + 2ixy = -1 + 2i\sqrt{6} \quad \textbf{(0,5 pt)}.$$

D'où $x^2 - y^2 = -1$ et $2xy = 2\sqrt{6}$ **(0,5 pt)**. Comme on a aussi

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = |-1 + 2i\sqrt{6}| = \sqrt{1 + 4 \cdot 6} = 5 \quad \textbf{(1 pt)},$$

on en déduit que $2x^2 = 4$, i.e., $x = \pm\sqrt{2}$. Du coup, $y = \pm\sqrt{3}$. D'où les deux racines carrées de $-1 + 2i\sqrt{6}$ sont $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2} - i\sqrt{3}$ **(1 pt)**.