Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Examen terminal, le 6 janvier 2005, 9h00-12h00

CORRIGE ET BAREME

Question de cours. (2 pts) *1 point pour l'énoncé, 1 point pour la démonstration. Moins 0,5 point s'il y a des conditions superflues comme $a \neq 0$, ou pour la condition absurde comme $a \in \mathbb{R}$ dans l'énoncé, ou encore pour $a \in \mathbb{N}$ au lieu de $a \in \mathbb{Z}$. 0,5 pt pour évoquer le Théorème de Bézout correctement dans la démonstration. 0 pour un énoncé autre que le Lemme de Gauss, correcte ou non, et démontré ou non.*

Exercice 1. a. Comme $f(3) = 2$ et $f(4) = 1$, on a $f(A) = \{1, 2\}$. **(0,5 pt)** *0 si la réponse n'est pas un sous-ensemble de E.*

b. On a $f \circ f(1) = 2$, $f \circ f(2) = 2$, $f \circ f(3) = 3$ et $f \circ f(4) = 3$. Donc $f(A) = \{3\}$. **(0,5 pt)** *0 si la réponse est $\{3, 3\}$.*

c. Comme $f(1) \in A$, $f(2) \in A$, $f(3) \notin A$ et $f(4) \notin A$, on a $f^{-1}(A) = \{1, 2\}$. **(0,5 pt)** *0 si on parle de l'application réciproque.*

d. Comme $f \circ f(1) \notin A$, $f \circ f(2) \notin A$, $f \circ f(3) \in A$ et $f \circ f(4) \in A$, on a $(f \circ f)^{-1}(A) = \{3, 4\}$. **(0,5 pt)** *idem.*

Exercice 2. a. On détermine d'abord $\text{pgcd}(378, 315)$ en effectuant l'algorithme d'Euclide. On a $378 = 1 \times 315 + 63$ et $315 = 5 \times 63 + 0$. Donc, $\text{pgcd}(378, 315) = 63$. Puis, on détermine $\text{pgcd}(63, 210)$. On a $210 = 3 \times 63 + 21$ et $63 = 3 \times 21 + 0$. Donc $d = 21$. **(2 pt)** *Moins 1 pt par erreur de calcul. 0 si fausse réponse sans utiliser l'algorithme d'Euclide.*

b. En remontant les calculs, on voit que $(-3) \times 63 + 1 \times 210 = 21$ et que $1 \times 378 + (-1) \times 315 = 63$. On trouve que $(-3) \times 378 + 3 \times 315 + 1 \times 210 = 21$, i.e., on peut prendre $a = -3$, $b = 3$ et $c = 1$. **(2 pt)** *0 si fausse réponse ; tant pis pour ceux qui ne vérifient pas les réponses.*

Exercice 3. On effectue l'algorithme d'Euclide pour déterminer $\text{pgcd}(P, Q)$. On a $P = (X^5 + 3)Q + (X^3 - 1)$, $Q = (X^5 + X^2 - 3)(X^3 - 1) + (X^2 + X + 1)$ et $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) + 0$. Donc $\text{pgcd}(P, Q) = X^2 + X + 1$ **(2 pt)** et on trouve les polynômes U et V en remontant les calculs : $U = -X^5 - X^2 + 3$ et $V = X^{10} + X^7 + 3X^2 - 8$. **(2 pt)** *Moins 1 pt par erreur de calcul.*

Exercice 4. Soit $P = 2X^5 - 2X^4 + X^3 + 2X^2 + 5$ et $Q = X^6 + X^4$. On décompose Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et on obtient $Q = X^4(X^2+1)$ **(1 pt)**. Pour décomposer la fraction P/Q en éléments simples, on effectue la division de P par X^2+1 suivant les puissances croissantes à l'ordre 3. Cela donne $P = (X^3 - 3X^2 + 5)(X^2+1) + X^4(X+1)$ **(2 pt)**. D'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{(X^3 - 3X^2 + 5)(X^2+1) + X^4(X+1)}{X^4(X^2+1)} =$$
$$= \frac{1}{X} - \frac{3}{X^2} + \frac{5}{X^4} + \frac{X+1}{X^2+1} \ \textbf{(1 pt)}.$$

0 pour ceux qui ne savent pas ce que c'est une décomposition en éléments simples.

Exercice 5. a. La suite extraite $a_{4k} = \frac{1}{3}(16k^2 + 8k - 1)$ est clairement non bornée. Donc la suite a_n est également non bornée. **(1 pt)**

b. La suite extraite

$$a_{8k+2} = \frac{-(8k+2)^2 + 2(8k+2) - 1}{2(8k+2)^2 + 3}$$

est clairement convergente avec limite $-\frac{1}{2}$. **(1 pt)**

c. La suite extraite

$$a_{4k+2} = \frac{-(4k+2)^2 + 2(4k+2) - 1}{2(4k+2)^2 \times (-1)^k + 3}$$

est bornée car elle est réunion de deux suites convergentes, et donc bornées, à savoir la suite a_{8k+2} et la suite a_{8k+6}. La première tend vers $-\frac{1}{2}$, la deuxième tend vers $\frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$, la suite a_{4k+2} ne converge pas. **(2 pt)**

0 pour tous ceux qui pensent que les suites $(2n-1)_n$ ou $(n^2\cos(\frac{n\pi}{2}))_n$ sont des suites extraites de la suite $(a_n)_n$.