Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Contrôle continu, le 20 octobre 2004, 8h00–8h20
CORRIGE et BAREME

Exercice 1. Pour $n = 0$, on a $2 \times (-3)^{3n+1} - 1 = 2 \times (-3) - 1 = -7 = (-1)\times 7$. Comme $-1 \in \mathbb{Z}$, l'entier 7 divise $2\times(-3)^{3n+1}-1$ lorsque $n = 0$ (**1 pt** ; seulement **0,5 pt** si départ de la récurrence à $n = 1$, car dans ce cas vous n'aurez pas démontré que $2 \times (-3)^{3n+1} - 1$ est divisible par 7 quand $n = 0$).

Supposons maintenant que 7 divise $2 \times (-3)^{3n+1} - 1$ pour un certain entier naturel n. Montrons que 7 divise $2 \times (-3)^{3(n+1)+1} - 1$ (**1,5 pt** pour toute bonne hypothèse de récurrence). Or,

$$\begin{aligned} 2 \times (-3)^{3(n+1)+1} - 1 = 2 \times (-3)^{3n+4} - 1 = 2 \times (-3)^{3n+1} \times (-3)^3 - 1 = \\ = (-27) \times (2 \times (-3)^{3n+1} - 1) - 28 \end{aligned}$$

(Ce calcul vaut **1,5 pt** : **0,5 pt** pour la première égalité, i.e., pour savoir bien substituer $n+1$ pour n, **1 pt** pour la dernière, ou pour toute autre expression correcte qui fait intervenir l'entier au rang n). Par l'hypothèse de récurrence, 7 divise $2 \times (-3)^{3n+1} - 1$. Donc, 7 divise aussi $(-27) \times (2 \times (-3)^{3n+1} - 1)$. Comme $-28 = (-4)\times 7$ et $-4 \in \mathbb{Z}$, l'entier 7 divise également -28. Il s'ensuit que 7 divise la somme

$$(-27) \times (2 \times (-3)^{3n+1} - 1) + (-28) = 2 \times (-3)^{3(n+1)+1} - 1 \quad (\textbf{1 pt}).$$