Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE PARCOURS A

ALGEBRE ET ANALYSE

Contrôle continu, le 6 octobre 2004, 9h40-10h00
CORRIGE

Exercice 1. Vrai. Un diagramme de Venn nous l'apprend facilement. On peut aussi démontrer les deux inclusions :

Soit x un élément du premier membre. Pour montrer que x appartient au second membre, on peut supposer que x n'appartient ni à $A \setminus B$ ni à $B \setminus C$. On montre que x appartient à $C \setminus A$. Or, comme x appartient au premier membre, x appartient à A, B ou C. Comme x n'appartient pas à $A \setminus B$, x appartient à B ou C. Puis, comme x n'appartient pas à $B \setminus C$, x appartient à C. Il faut encore montrer que $x \notin A$. Supposons, par l'absurde, que $x \in A$. Comme x n'appartient pas à $A \setminus B$, x appartient à B. Donc, $x \in A \cap B \cap C$. Contradiction.

Réciproquement, évidemment, les sous-ensembles $A \setminus B$, $B \setminus C$ et $C \setminus A$ sont tous inclus dans le premier membre. Donc aussi leur réunion.

Exercice 2. Faux. Soit $E = \{1\}$ et $F = \{2\}$. Alors $E \times F = \{(1,2)\}$ et $F \times E = \{(2,1)\}$. Comme $(1,2) \neq (2,1)$, $E \times F \neq F \times E$.

Exercice 3. Faux. Pour $x = 1 \in E$, il y a deux éléments $y \in F$ avec $(x,y) \in f$, à savoir $y = 3$ et $y = 1$.

Exercice 4. Faux. Contre-exemple : soit $f\colon \{1,2\} \to \{1\}$ définie par $f(1) = f(2) = 1$, et soit $A = \{1\}$. Alors, $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1,2\} \not\subseteq \{1| = A$.

Exercice 5. Vrai. Montrons les deux inclusions. Soit x un élément du premier membre, c-à-d, $x \in E$ tel que $f(x) \in B \cap B'$. En particulier, $f(x) \in B$, donc aussi $x \in f^{-1}(B)$. De même, $x \in f^{-1}(B')$, ce qui montre que x appartient au second membre.

Réciproquement, soit x un élément du second membre, i.e., $x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B')$. Cela veut dire que $f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$. Du coup, $f(x) \in B \cap B'$ et $x \in f^{-1}(B \cap B')$.

Exercice 6. Vrai. Soit $y \in f(A \cup A')$. Donc il existe $x \in A \cup A'$ tel que $f(x) = y$. Deux possibilités : $x \in A$ ou $x \in A'$. Au premier cas, $y = f(x) \in f(A)$. Au deuxième, $y = f(x) \in f(A')$. Donc, dans les deux cas, $y \in f(A) \cup f(A')$.

Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(A')$. Deux possibilités, $y \in f(A)$ ou $y \in f(A')$. Au premier cas, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Il existe, a fortiori, $x \in A \cup A'$ tel que $f(x) = y$, i.e., $y \in f(A \cup A')$. De même au cas où $y \in f(A')$. Par conséquent, $y \in f(A \cup A')$.

Exercice 7. Faux. $1 \neq 3$ mais $f(1) = f(3)$.

Exercice 8. Faux. Contre-exemple, $f\colon \{1\} \to \{1,2\}$ définie par $f(1) = 1$, et $g = \mathrm{id}_{\{1,2\}}$. Alors, g est surjective mais $g \circ f$ ne l'est pas car $2 \notin (g \circ f)(\{1\}) = f(\{1\}) = \{1\}$.

Exercice 9. Faux. Supposons que R est une relation d'ordre. Comme on a $1R2$ et $2R3$, on aurait $1R3$ par transitivité. Du coup $3R1$ et $1R3$. Par anti-symétrie, $1 = 3$. Contradiction.

Exercice 10. Vrai. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{N}$, on a les propriétés suivantes :

a. $x + x = 2x$ est pair,

b. si $x + y$ est pair, $y + x$ l'est aussi car $y + x = x + y$, et

c. si $x + y$ et $y + z$ sont pairs, alors $x + z = (x + y) + (y + z) - 2y$ est pair.

Par conséquent, R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}$.