

Université de Bretagne Occidentale  
Département de Mathématiques  
DEUG STPI 1ère année

MATHEMATIQUES

Examen terminal, 5 janvier 2004, 9h30–11h00

Documents et calculatrices sont interdits.

**Exercice 1.** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{4x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - x^3}.$$

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction réelle définie par

$$f(x) = \sin^5(x) + 3 \sin(x).$$

- Déterminer le plus grand intervalle  $I$  contenant 0 sur lequel  $f$  est monotone.
- Déterminer l'image  $J = f(I)$ .
- Montrer que  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J$ .
- Calculer  $f(\frac{\pi}{4})$ .
- Soit  $g: J \rightarrow I$  l'application réciproque de  $f$ . Calculer la dérivée de  $g$  en  $\frac{13}{4\sqrt{2}}$ .

**Exercice 3.** Soit  $f$  la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\arctan(x)}.$$

- Déterminer le développement limité de  $\sin(x)$  en  $x = 0$  à l'ordre 5.
- Déterminer le développement limité de  $\arctan(x)$  en  $x = 0$  à l'ordre 5.
- Déterminer le développement limité de  $f$  en  $x = 0$  à l'ordre 4.
- Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 \arctan(x)}{x^4 \arctan(x)}.$$