UNIVERSITE DE BRETAGNE OCCIDENTALE
Département de Mathématiques

Année universitaire 2002-2003
DEUG MIAS-MASS 1ère année
Epreuve de ALG 11F - M11
Mardi 21 Janvier 2003 - Durée 2h

Epreuve sans document ni calculatrice
Les exercices sont indépendants

Question de cours Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

1. Qu'est-ce qu'une racine $n-$ième de l'unité ?
2. Démontrer qu'il y a exactement n racines $n-$ième de l'unité.

Exercice 1 Trouver tous les nombres complexes z tels que :

$$z^4 + 2\sqrt{2}z^2 + 4 = 0 .$$

Exercice 2 Dans tout l'exercice, m désigne un entier naturel non nul.

1. A partir de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs p_1 et p_2 tels que

$$p_1\,(6m+5) + p_2\,(2m+1) = 1 .$$

2. En déduire tous les couples (q_1, q_2) d'entiers relatifs tels que

$$q_1\,(6m+5) + q_2\,(2m+1) = 1 .$$

Exercice 3 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$R_1(X) = \frac{2X^3+3X^2-2X+5}{(1-X^2)(X^2+3)} \quad \text{et} \quad R_2(X) = \frac{2X^2+4}{X^3+2X^2} .$$

Exercice 4 Soit P un polynôme non nul de $\mathbf{C}[X]$.

1. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Montrer que, si $\alpha \in \mathbf{C}$ est une racine de P de multiplicité n (mais pas de multiplicité $(n+1)$), alors α est une racine de multiplicité $n-1$ de P' (mais pas de multiplicité n).
2. En déduire que, si P' divise P et si 0 est racine de P, alors il existe un entier $n \geq 1$ et un nombre complexe a tels que $P(X) = aX^n$.