Université de Rennes 1
DEUG Sciences & Technologie
1ère année

MA3-Mathématiques

Examen Terminal, le 1er juin 1999, 8h–10h

CORRIGE

Exercice 1. a. Supposons qu'il existe une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant (*). On montre que $\mathcal{E}$ est alors libre. En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_2 u_3 = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(0) &= \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_2 u_3) = \\ &= \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) + \lambda_3 \varphi(u_3) = \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3. \end{aligned}$$

Or, $\mathcal{F}$ est une base, donc la famille extraite (v_1, v_2, v_3) de $\mathcal{F}$ est libre. D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Cela montre que $\mathcal{E}$ est libre lorsqu'il existe $\varphi\colon E \to F$ linéaire vérifiant (*).

Réciproquement, supposons que $\mathcal{E}$ est libre. Comme E est de dimension finie, on peut compléter $\mathcal{E}$ à une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. Soit $\varphi\colon E \to F$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(u_i) = \begin{cases} v_i, & \text{si } i \in \{1,2,3\}, \text{ et} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $\varphi\colon E \to F$ est une application linéaire vérifiant (*). Cela montre qu'il existe au moins une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant (*) lorsque $\mathcal{E}$ est libre.

On a donc montré qu'il existe au moins une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant (*) si et seulement si $\mathcal{E}$ est libre.

b. D'après le a, $\mathcal{E}$ est libre. Comme E est de dimension n et comme $\mathcal{E}$ est de cardinal 3, on a $n \geq 3$.

c. On applique quelques étapes de la méthode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -3 & c-2a \\ 0 & -1 & d-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & d-\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{E}$ est liée si et seulement si $c - b = 0$ et $d - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a = 0$. D'après le a, il existe donc une application linéaire $\varphi\colon E \to F$ vérifiant (*) si et seulement si $c - b \neq 0$ ou $d - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a \neq 0$.

Exercice 2. a. On applique la méthode de Gaus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et comme (v_1, v_2, v_3) est de cardinal 3, cette famille est forcément génératrice de $\mathbb{R}^3$. Elle est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On voit que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = 0$. La matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Comme $(M')^2 = M'$ et comme $(M')^2$ est la matrice de $f \circ f$ dans la base (v_1, v_2, v_3), les deux applications linéaires $f \circ f$ et f ont la même matrice dans la base (v_1, v_2, v_3). Il en résulte que $f \circ f = f$.

d. L'application f est la projection sur le plan $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(v_3)$.

Exercice 3. a. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} T(f+g) &= (f+g)(0) + (f+g)'(0)X + \tfrac{1}{2}(f+g)''(0)X^2 = \\ &= f(0) + g(0) + f'(0)X + g'(0)X + \tfrac{1}{2}f''(0)X^2 + \tfrac{1}{2}g''(0)X^2 = \\ &= T(f) + T(g) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T(\lambda f) &= (\lambda f)(0) + (\lambda f)'(0)X + \tfrac{1}{2}(\lambda f)''(0)X^2 = \\ &= \lambda f(0) + \lambda f'(0) + \tfrac{1}{2}\lambda f''(0)X^2 = \\ &= \lambda T(f). \end{aligned}$$

L'application T est donc linéaire.

b. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + cX^2$. On cherche $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que le polynôme de Taylor de f à l'ordre 2 soit égal à P. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = a + bx + cx^2$. la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc elle est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$, i.e., on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Comme $f(0) = a$, $f'(0) = b$ et $f''(0) = 2c$, on a $T(f) = P$. Cela montre la surjectivité de T.

c. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x^3$. On a bien $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Or, $T(f) = 0$ car $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. On a aussi $T(0) = 0$ car T est linéaire. Comme $f \neq 0$, T n'est donc pas injective.

d. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin + \lambda_3 \cos^2 + \lambda_4 \sin^2 = 0$$

dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Cela veut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 \cos^2(x) + \lambda_4 \sin^2(x) = 0.$$

Pour $x = 0$ et $x = \pi$ on obtient $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, respectivement. D'où $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. De même pour $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $-\lambda_2 + \lambda_4 = 0$ et $\lambda_2 + \lambda_4 = 0$. D'où $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Cela montre que $\mathcal{B}$ est libre. Comme $\mathcal{B}$ engendre E par définition de E, $\mathcal{B}$ est une base de E.

e. On a

$$\begin{aligned} S(\cos) &= 1 - \tfrac{1}{2}X^2 \\ S(\sin) &= X \\ S(\cos^2) &= 1 - X^2 \\ S(\sin^2) &= X^2. \end{aligned}$$

La matrice S dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donc égale à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f. Comme $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{rang}(A)$, on détermine $\operatorname{rang}(A)$. On applique la méthode de Gauss à A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc de rang 3. Par conséquent, l'application S est de rang 3.

D'après le Théorème du rang

$$\dim(\ker(S)) = \dim(E) - \operatorname{rang}(S).$$

L'espace vectoriel E est de dimension 4 car la famille $\mathcal{B}$ est une base de E d'après le d. L'application S est de rang 3 d'après ce qui précède. Par conséquent, $\dim(\ker(S)) = 4 - 3 = 1$.