Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Examen terminal, 2ème session, le 21 juin 2002

CORRIGE

Exercice 1. a. Comme le système d'équations définissant V est déjà échelonné, on voit tout de suite une base de V:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(V) = 2$. De même, une base de W est la famille

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(W) = 2$.

b. On détermine une base de $V \cap W$. On effectue la méthode de Gauss sur le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} 2x & - & y & & & & & = & 0\\ & & & & z & + & t & = & 0\\ x & & & + & z & & & = & 0\\ & & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x & & & + & z & & & = & 0\\ & - & y & - & 2z & & & = & 0\\ & & & & z & + & t & = & 0\\ & & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x & & & + & z & & & = & 0\\ & - & y & - & 2z & & & = & 0\\ & & & & z & + & t & = & 0\\ & & & - & 2z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x & & & + & z & & & = & 0\\ & - & y & - & 2z & & & = & 0\\ & & & & z & + & t & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Il s'ensuit qu'une base de $V \cap W$ est

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(V \cap W) = 1$.

c. D'après la relation de Grassmann,

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

La famille

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une famille de vecteurs de $V + W$. Elle est clairement libre. Comme son cardinal est égal à $\dim(V + W)$, elle est une base de $V + W$.

Exercice 2. a. La matrice M de F dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. On résoud

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & - & 5y & & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que $-5 + X + 2X^2$ est une base de $\ker(F)$.

c. D'après le Théorème du rang

$$\dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker(F)) = 3 - 1 = 2.$$

Or, les deux polynômes $1 + X - X^2$ et $1 - X - 5X^2$ appartiennent à $\mathrm{im}(F)$ et constituent une famille libre. Comme $\dim(\mathrm{im}(F)) = 2$, ils constituent une base de $\mathrm{im}(F)$.

d. $\mathrm{rang}(M) = \dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.

e. Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(X + X^2) + \mu(1 + 2X^2) + \nu(2 + X) = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ -2\mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 5\nu = 0 \end{cases}$$

D'où $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre. Comme son cardinal est égal à $\dim(\mathbb{R}_2[X])$, elle est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

f. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

g. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est la matrice P^{-1}. Calculons P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

h. La matrice M' de F dans la base $\mathcal{B}'$ est alors

$$M' = P^{-1}MP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -11 & 8 \\ -3 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 17 & -9 \\ -11 & -11 & -13 \\ 13 & 18 & 14 \end{pmatrix}.$$

i. $\mathrm{rang}(M') = \dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.

Exercice 3. a. On a $f \circ (-f) = \mathrm{id}_V$ et $(-f) \circ f = \mathrm{id}_V$. Donc f est un automorphisme.

b. Supposons que $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ satisfont $\lambda v_1 + \mu f(v_1) = 0$. En appliquant f on a aussi $\lambda f(v_1) - \mu v_1 = 0$. Si l'on prend λ fois la première équation et on en soustrait μ fois la deuxième, on obtient $(\lambda^2 + \mu^2)v_1 = 0$. Comme $v_1 \neq 0$, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, i.e., $\lambda = \mu = 0$. Cela montre que $v_1, f(v_1)$ est libre.

c. Supposons que $\lambda_1 v_1 + \mu_1 f(v_1) + \lambda_2 v_2 + \mu_2 f(v_2) = 0$. En appliquant f on a aussi $\lambda_1 f(v_1) - \mu_1 v_1 + \lambda_2 f(v_2) - \mu_2 v_2 = 0$. D'où $(\lambda_2^2 + \mu_2^2)v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1, f(v_1))$. Donc $\lambda_2 = \mu_2 = 0$, puis $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Par conséquent, $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)$ est libre.

d. Si $V = \{0\}$, V est de dimension paire. Donc on peut supposer que $V \neq \{0\}$. D'après le a, il existe $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$, tel que $v_1, f(v_1)$ est libre. Si $v_1, f(v_1)$ engendre V, $v_1, f(v_1)$ est une base de V. En particulier, V est de dimension paire si $v_1, f(v_1)$ est générateur de V. On peut donc supposer que $V \neq \mathrm{Vect}(v_1, f(v_1))$. D'après le b, il existe $v_2 \in V$ tel que la famille $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)$ est libre. Si elle engendre V, elle est une base de V et V et de dimension paire. Sinon, on peut choisir $v_3 \in V$ qui n'est pas combinaison linéaire de $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2)$. Comme dans le b, on montre que la famille $v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), v_3, f(v_3)$ est libre. Si elle engendre V elle est une base de V et V est donc de dimension paire. Sinon, on réitère. Ce processus se termine forcément car V est de dimension finie. A la fin on aura une base de V de la forme

$$v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \ldots, v_n, f(v_n)$$

pour certain $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\dim(V) = 2n$. En particulier, $\dim(V)$ est paire.