Université de Rennes 1
DEUG, 1ère année

MA3-Mathématiques

Contrôle, le 16 février 2002, 8h–10h

CORRIGE

Exercice 1. On effectue la méthode de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & a^2y & + & z & = & a & L_1 \\ ax & + & ay & + & z & = & 1 & L_2 \\ x & + & ay & + & az & = & 1 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & a^2y & + & z & = & a & L'_1 = L_1 \\ & & (a-a^3)y & + & (1-a)z & = & 1-a^2 & L'_2 = L_2 - aL_1 \\ & & (a-a^2)y & + & (a-1)z & = & 1-a & L'_3 = L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & a^2y & + & z & = & a & L''_1 = L'_1 \\ & & (a-a^2)y & + & (a-1)z & = & 1-a & L''_2 = L'_3 \\ & & (a-a^3)y & + & (1-a)z & = & (1-a^2) & L''_3 = L'_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & a^2y & + & z & = & a & L'''_1 = L''_1 \\ & & (a-a^2)y & + & (a-1)z & = & 1-a & L'''_2 = L''_2 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & 0 & L'''_3 = L''_3 - (1+a)L''_2 \end{array}\right. .$$

Noter que $a - a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$, et que $2 - a - a^2 = 0$ si et seulement si $a = 1$ ou $a = -2$. On distingue donc quatre cas:

1er cas: $\mathbf{a \neq -2, 0, 1}$. On trouve comme unique solution $(x, y, z) = (0, \frac{1}{a}, 0)$.

2ème cas: $\mathbf{a = -2}$. On a à résoudre le système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ & & -6y & - & 3z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions dans ce cas est

$$\{(z, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}.$$

3ème cas: $\mathbf{a = 0}$. On a à résoudre le système d'équations linéaires en x, y, z

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 0 \\ & & -z & = & 1 \\ & & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est clairement incompatible. Donc, dans ce cas, il n'y a pas de solution.

4ème cas: a = 1. On a à résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans ce cas est

$$\{(1-y-z, y, z) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. a. Supposons que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 = 0$, c-à-d,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(X^2+2X-3) + \lambda_2(X^2-X+2) + \lambda_3(X^2+1) + \lambda_4(X-2) = \\ &= (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4)X + (-3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4). \end{aligned}$$

D'où le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 & L_2 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 & L_3 \end{cases}.$$

Si on effectue la méthode de Gauss on trouve les systèmes équivalents:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1' = L_1 \\ -3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 & L_2' = L_2 - 2L_1 \\ 5\lambda_2 + 4\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 & L_3' = L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1'' = L_1' \\ 15\lambda_2 + 10\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0 & L_2'' = -5L_2' \\ 15\lambda_2 + 12\lambda_3 - 6\lambda_4 = 0 & L_3'' = 3L_3' \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_1''' = L_1'' \\ 15\lambda_2 + 10\lambda_3 - 5\lambda_4 = 0 & L_2''' = L_2'' \\ 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 & L_3''' = L_3'' - L_2'' \end{cases}. \end{aligned}$$

En particulier, $\lambda_4 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = -1$ est une solution non triviale. On a donc la relation de dépendance linéaire non triviale

$$-P_1 + 0P_2 + P_3 + 2P_4 = 0$$

dans $\mathbb{R}[X]$. La famille P_1, P_2, P_3, P_4 est donc liée, i.e., elle n'est pas libre.

b. Comme $P_4 = \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_3$, la famille P_1, P_2, P_3 engendre F. Montrons qu'elle est libre. Supposons que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. On a donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + 0 P_4 = 0$. On a vu dans le a qu'il s'ensuit que

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & 0 \\ & & 15\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & - & 5\cdot 0 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & - & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Par conséquent, la famille P_1, P_2, P_3 est libre. C'est donc une base de F.

Exercice 3. a. Soient

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $3\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 4 - 2 = -3 \neq 0$, le vecteur w_1 n'appartient pas à F_1. Comme $F_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$, le vecteur w_1 appartient bien à F_2. Par conséquent, $w_1 \in F_2 \setminus F_1$. D'où $F_2 \not\subseteq F_1$.

b. On applique la méthode de Gauss sur le système d'équations linéaires qui définit F_1:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 3x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 & L_1 \\ x & + & 2y & & & + & t & = & 0 & L_2 \\ -x & & & - & z & + & 2t & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & 2y & & & + & t & = & 0 & L_1' = L_2 \\ 3x & - & 2y & + & z & - & t & = & 0 & L_2' = L_1 \\ -x & & & - & z & + & 2t & = & 0 & L_3' = L_3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & 2y & & & + & t & = & 0 & L_1'' = L_1' \\ & & -8y & + & z & - & 4t & = & 0 & L_2'' = L_2' - 3L_1' \\ & & 2y & - & z & + & 3t & = & 0 & L_3'' = L_3' + L_1' \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & 2y & & & + & t & = & 0 & L_1''' = L_1'' \\ & & 2y & - & z & + & 3t & = & 0 & L_2''' = L_3'' \\ & & -8y & + & z & - & 4t & = & 0 & L_3''' = L_2'' \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & 2y & & & + & t & = & 0 & L_1'''' = L_1''' \\ & & 2y & - & z & + & 3t & = & 0 & L_2'''' = L_2''' \\ & & & & -3z & + & 8t & = & 0 & L_3'''' = L_3''' + 4L_2''' \end{array}\right. .$$

On trouve que $z = \frac{8}{3}t$, $y = -\frac{1}{6}t$ et $x = -\frac{2}{3}t$. D'où

$$F_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3}t \\ -\frac{1}{6}t \\ \frac{8}{3}t \\ t \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left(\begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{array} \right) = \mathrm{Vect} \left(\begin{array}{c} -4 \\ -1 \\ 16 \\ 6 \end{array} \right).$$

Donc le vecteur

$$v_1 = \left(\begin{array}{c} -4 \\ -1 \\ 16 \\ 6 \end{array} \right)$$

constitue une famille génératrice de F_1.

c. Pour montrer que F_1 est contenu dans F_2, il suffit de montrer que le vecteur v_1 ci-dessus appartient à F_2. Pour cela, il faut résoudre

$$v_1 = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

Ceci donne lieu au système d'équations linéaires:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} -\lambda & - & 2\mu & = & -4 & L_1 \\ \lambda & - & 3\mu & = & -1 & L_2 \\ 4\lambda & + & 8\mu & = & 16 & L_3 \\ 2\lambda & + & 2\mu & = & 6 & L_4 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -\lambda & - & 2\mu & = & -4 & L_1' = L_1 \\ & & -5\mu & = & -5 & L_2' = L_2 + L_1 \\ & & 0 & = & 0 & L_3' = L_3 + 4L_1 \\ & & -2\mu & = & -2 & L_4' = L_4 + 2L_1 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -\lambda & - & 2\mu & = & -4 & L_1'' = L_1' \\ & & \mu & = & 1 & L_2'' = -\frac{1}{5}L_2' \\ & & 0 & = & 0 & L_3'' = L_3' \\ & & 0 & = & 0 & L_4'' = L_4' - \frac{2}{5}L_2' \end{array} \right. .$$

D'où $\mu = 1$ et $\lambda = 2$. On a donc

$$v_1 = 2w_1 + w_2$$

ce qui montre que v_1 appartient bien à F_2.