Institut Mathématique, Université de Rennes 1
DEA de Mathématiques

ESPACES DE TEICHMÜLLER

Examen Terminal, le 23 mars 1999, 14h–17h

Barème au verso.

1. Soit X la surface de Riemann $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$. Soit $p\colon \mathbb{C} \to X$ le morphisme quotient.

a. Montrer qu'il existe une unique différentielle de Beltrami $\mu \in B(X)$ sur X telle que
$$p^\star(\mu) = \frac{1+i}{2}\frac{d\overline{z}}{dz}.$$

b. Déterminer $\tau \in \mathbb{C}$ tel que la déformation X_μ de X par μ soit biholomorphe à $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$.

2. Soit $g \in \mathbb{N}$ et soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Le groupe des automorphismes biholomorphes de X est noté par $\mathrm{Aut}(X)$. Soit
$$f\colon \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(X)$$
le morphisme qui associe à un automorphisme α de X sa classe dans le quotient
$$\mathrm{Diff}^{+,0}(X)\backslash\mathrm{Diff}^{+}(X) = \mathrm{Mod}(X).$$

a. Montrer que le groupe d'isotropie $\mathrm{Mod}(X)_{(X,\mathrm{id})}$ du point (X,id) de l'espace de Teichmüller $T(X)$ est égal à l'image $\mathrm{im}(f)$ de f.

b. Montrer que l'espace des modules R_g des surfaces de Riemann compactes de genre g est non singulier en $[X] \in R_g$ lorsque $\mathrm{Aut}(X)$ est trivial.

Dans la suite de cet exercice on suppose que $g \geq 2$. On admet que le morphisme f est alors injectif.

c. Montrer que $\mathrm{Aut}(X)$ est fini.

3. Soit $g \in \mathbb{N}$ et soit $G \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ un groupe de Schottky de rang g.

a. Soit $h\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un homéomorphisme quasi-conforme. Soit $\mu \in B(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ sa dilatation. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que hGh^{-1} soit un groupe de Schottky de rang g.

b. Soit X' une surface de Riemann compacte de genre g. Montrer qu'il existe un groupe de Schottky G' de rang g tel que X' soit isomorphe à Ω'/G', où Ω' est le domaine de discontinuité de G'.

T.S.V.P.

4. Soit $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, et soient X_1 et X_2 deux surfaces de Riemann compactes de genre g. Montrer qu'il existe un groupe kleinien $G \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel que son domaine de discontinuité Ω ait deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2, toutes les deux stables pour l'action de G, telles que

$$\Omega_1/G \cong X_1 \quad \text{et} \quad \Omega_2/G \cong X_2.$$

Barème indicatif:

1 : 5 pts		**2 : 5 pts**			**3 : 5 pts**		**4 : 5 pts**
a: 2	b: 3	a: 2	b: 2	c: 1	a: 2,5	b: 2,5	5

T.S.V.P.